Licence de Mathématiques

MESURE ET INTEGRATION

Nouvelle édition,

KANGNI Kinvi

TABLE DES MATIERES

I. ESPACE MESURABLE

X est un ensemble non vide. $\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble des parties de X.

I.1. **SEMI-ANNEAU**

I.1.1 **Définition :** Une partie $\mathcal{S}$ de $\mathcal{P}(X)$ est un semi-anneau si :

i) $\mathcal{S} \neq \phi$

ii) $\forall A, B \in \mathcal{S}, \quad A \cap B \in \mathcal{S}$

iii) $\forall A,\ B \in \mathcal{S},\ A \diagdown B \neq \phi \Longrightarrow A \diagdown B$ admet une $\mathcal{S}$-partition finie [partition finie en éléments de $\mathcal{S}$

I.1.2. Exemple
$\mathcal{J} = \{[a, b[\,/ -\infty < a \leq b < +\infty\}$ est un semi-anneau de parties de $\mathbb{R}$.

I.1.3. Proposition : Soient $\mathcal{S}$ un semi-anneau de parties de $X, \{A_i : 1 \leq i \leq n\}$ une partie finie de $\mathcal{S}$.

a) Si A est un élément de $\mathcal{S}$ tel que $A \diagdown \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \neq \phi$ alors $A \diagdown \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ admet une $\mathcal{S}$-partition finie.

b) si $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \neq \phi$ alors $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ admet une $\mathcal{S}$-partition finie $\{S_k : 1 \leq k \leq m\}$.

Preuve
a) Raisonnement par récurrence sur n.

- $\underline{n = 1}$

$$\left.\begin{array}{l} A, \quad A_1 \in \mathcal{S} \\ \\ A \diagdown A_1 \neq \phi \end{array}\right\} \Longrightarrow A \diagdown A_1 \text{ admet une } \mathcal{S}\text{-partition finie [d'après } \mathbf{I.1.1}]$$

- Supposons la propriété vraie à un certain ordre $n \geq 1$:
$$\left[A,\ A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{S},\ A \diagdown \bigcup_{i=1}^{n} A_i \neq \phi\right] \Longrightarrow A \diagdown \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$
admet une $\mathcal{S}$-partition finie.
Considérons des éléments $A,\ A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1}$ de $\mathcal{S}$ tels que

$$A \diagdown \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \neq \phi$$

$$\phi \neq A \diagdown \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \subset A \diagdown \bigcup_{i=1}^{n} A_i \Longrightarrow A \diagdown \bigcup_{i=1}^{n} A_i \neq \phi.$$

D'après l'hypothèse de récurrence $A \diagdown \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ possède une $\mathcal{S}$-partition finie $\{S_k : 1 \leq k \leq p\}$

$$A \diagdown \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = \left[A \diagdown \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] \diagdown A_{n+1} = \left[\bigcup_{k=1}^{p} S_k\right] \diagdown A_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{p} \left(S_k \diagdown A_{n+1}\right)$$

Posons $K = \{k \in \{1, 2, ..., p\} : S_k \diagdown A_{n+1} \neq \phi\}$
$\forall k \in K, \quad S_k \diagdown A_{n+1}$ admet une $\mathcal{S}$-partition finie $\{S_{kj} : 1 \leq j \leq q_k\}$.
Il est clair que $\{S_{kj} : k \in K, 1 \leq j \leq q_k\}$ est une $\mathcal{S}$-partition finie de $A \diagdown \bigcup\limits_{i=1}^{n+1} A_i$.
Donc la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$.
Par conséquent elle est vraie à n'importe quel ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Supposons que $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \neq \phi$.
Posons :
$$B_1 = A_1; \quad \forall i \in \{2, ..., n\} \qquad B_i = A_i \diagdown \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$$
$$I = \{i \in \{1, 2, ..., \} : B_i \neq \phi\}$$
D'après a), pour tout élément i de I, B_i admet une $\mathcal{S}$-partition finie $\{S_{ik} : 1 \leq k \leq q_i\}$.
$\{S_{ik} : i \in I,\ 1 \leq k \leq q_i\}$est alors une $\mathcal{S}$ -partition finie de $\bigcup\limits_{i \in I} B_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

I-2 ANNEAU

I.2.1. **<u>Définition</u> :** Une partie $\mathcal{R}$ de $\mathcal{P}(X)$ est un anneau si :

i) $\mathcal{R} \neq \phi$

ii) $\forall A,\, B \in \mathcal{R} \quad A \cup B \in \mathcal{R}$

iii) $\forall A,\, B \in \mathcal{R} \quad A \setminus B \in \mathcal{R}$

I.2.2. **Exemples**

a) $\{\phi, X\}$ et $\mathcal{P}(X)$ sont des anneaux de parties de X.

b) $\{E \subset X : E$ possède un nombre fini d'éléments$\}$ est un anneau de parties de X.

I.2.3. **Proposition :** Soit $\mathcal{R}$ un anneau de parties de X.

a) $\phi \in \mathcal{R}$

b) $\forall A,\, B \in \mathcal{R} \quad A \cap B, \;\; A \triangle B \in \mathcal{R}$

Preuve

a) $\mathcal{R} \neq \phi \Longrightarrow \exists A \in \mathcal{R} \Longrightarrow \phi = \; A \setminus A \in \mathcal{R}$

b) Soient $A,\; B \in \mathcal{R}$, $\quad A,\, B \in \mathcal{R} \Longrightarrow A \cup B,\, A \setminus B, \;\; B \setminus A \in \mathcal{R}$

$$\Longrightarrow A \cup B, \;\; A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{R}$$
$$\Longrightarrow A \cup B,\, A \triangle B,\, A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \triangle B) \in \mathcal{R}$$

I.2.4 **Proposition :** Si $\{\mathcal{R}_i : i \in I\}$ est un ensemble d'anneaux de parties de X alors $\mathcal{R} = \bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{R}_i = \{A \subset X / \forall i \in I \quad A \in \mathcal{R}_i\}$ est un anneau.

Preuve

Soient $\{\mathcal{R}_i : i \in I\}$ un ensemble d'anneaux de parties de X et $\mathcal{R} = \bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{R}_i$

- $[\forall i \in I \quad \phi \in \mathcal{R}_i] \Longrightarrow \phi \in \mathcal{R} \Longrightarrow \mathcal{R} \neq \phi$
- Soient $A,\; B \in \mathcal{R}$. $\quad A,\; B \in \mathcal{R} \Longrightarrow [\forall i \in I \quad A,\; B \in \mathcal{R}_i]$

$$\Longrightarrow [\forall i \in I \quad A \cup B,\ A \setminus B \in \mathcal{R}_i]$$
$$\Longrightarrow A \cup B,\quad A \setminus B \in \mathcal{R}.$$

Donc $\mathcal{R}$ est un anneau

I.2.5. **Définition :** Soit ξ une partie non vide de $\mathcal{P}(X)$. L'intersection de tous les anneaux de parties de X contenant ξ est l'anneau $\mathcal{R}(\xi)$ engendré par ξ :

$$\mathcal{R}(\xi) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{R}_i \quad \text{où} \quad \{\ \mathcal{R}_i : i \in I\} = \{\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X) : \mathcal{R} \ \text{ anneau et } \xi \subset \mathcal{R}\}$$

I.2.6. **Proposition :** Soit $\mathcal{S}$ un semi-anneau de parties de X.

$$\mathcal{R}(\mathcal{S}) = \left\{E \subset X : \exists (S_i)_{1 \le i \le n} \in \mathcal{S}^n \ \text{ avec } \ E = \bigcup_{i=1}^{n} S_i\right\} \cup \{\phi\}$$

Preuve

Posons

$$\mathcal{R} = \left\{E \subset X : \exists (S_i)_{1 \le i \le n} \in \mathcal{S}^n \ \text{ avec } \ E = \bigcup_{i=1}^{n} S_i\right\} \cup \{\phi\}$$

i)

(1) $\phi \neq \mathcal{S} \subset \mathcal{R} \Longrightarrow \mathcal{R} \neq \phi$

(2) Soient $A,\ B \in \mathcal{R}$.

Si $A = \phi$ ou $B = \phi$ ou $A = B$ alors $\{A \cup B,\ A \setminus B\} \subset \{A, B, \phi\} \subset \mathcal{R}$.

Supposons donc $A \neq \phi \neq B$

Alors $A = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ et $B = \bigcup_{j=1}^{m} S'_j$ avec $(S_i)_{1 \le i \le n} \in \mathcal{S}^n$ et $\left(S'_j\right) 1_{\le j \le m} \in \mathcal{S}^m$

* Posons $S_{n+j} = S'_j$ pour $1 \le j \le m$

Alors $(S_i)_{1 \le i \le n+m} \in \mathcal{S}^{n+m}$ et $A \cup B = \bigcup_{i=1}^{n+m} S_i \in \mathcal{R}$

* $A \setminus B = \left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) \setminus \bigcup_{j=1}^{m} S'_j = \bigcup_{i=1}^{n} \left[S_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{m} S'_j\right)\right]$

Posons $I = \left\{i \in \{1, 2, ..., n\} : S_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{m} S'_j\right) \neq \phi\right\}$

$$A \setminus B = \bigcup_{i \in 1} \left[S_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{m} S'_j\right)\right]$$

D'après la proposition **I.1.3** a), pour tout élément i de I, $S_i \diagdown \left(\bigcup_{j=1}^{m} S'_j \right)$ admet une s-partition finie $\{S_{ik} : 1 \leq k \leq p_i\}$

$$(S_{ik})_{i \in I,\ 1 \leq k \leq p_i} \in \mathcal{S}^p \text{ avec } p = \sum_{i \in I} p_i \quad et\ A \diagdown B = \bigcup_{i \in I} S_{ik} \in \mathcal{R}$$

Donc $\mathcal{R}$ est un anneau contenant $\mathcal{S}$. D'où $\mathcal{R}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{R}$.
ii) Soit $A \in \mathcal{R} \diagdown \{\phi\}$
$\exists\ (S_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{S}^n$ avec $A = \bigcup_{i=1} S_i \Longrightarrow A \in \mathcal{R}(s)$
Donc $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}(\mathcal{S})$
Par suite $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{S})$

I.2.7. **Définition :** Une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(X)$ est une algèbre si :
i) $\mathcal{A}$ est un anneau
ii) $X \in \mathcal{A}$

I.2.8. **Proposition :** Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathcal{P}(X)$. Les conditions suivantes sont équivalentes
a) $\mathcal{A}$ est une algèbre
b) $\forall A,\ B \in \mathcal{A}\ \ A \cup B, X \diagdown A \in \mathcal{A}$

Preuve

· a) $\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} \text{ anneau} \\ X \in \mathcal{A} \end{array} \right. \Longrightarrow \forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \cup B,\ \ X \diagdown A \in \mathcal{A} \Longleftrightarrow b)$

· Supposons que b) est vraie :
Soient $A, B \in \mathcal{A}$
$A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$
$A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow X \diagdown A,\ \ B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \diagdown B = X \diagdown [(X \diagdown A) \cup B] \in \mathcal{A}$
$A \in \mathcal{A} \Longrightarrow \phi = A \diagdown A \in \mathcal{A} \Longrightarrow X = X \diagdown \phi \in \mathcal{A}$
Donc $\mathcal{A}$ est une algèbre

I.2.9. **Exemple :** $\{E \subset X : E \text{ fini ou } X \diagdown E \text{ fini}\}$ est une algèbre de parties de X.

I.2.10. **Proposition :** Soit $\{\mathcal{A}_i : i \in I\}$ un ensemble d'algèbres de parties de X. $\mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i = \{A \subset X : \forall i \in I,\ \ A \in \mathcal{A}_i\}$ est une algèbre de parties de X.

Preuve :

· D'après **I.2.4,** $\mathcal{A}$ est un anneau
· $[\forall i \in I,\ X \in \mathcal{A}_i] \Longrightarrow X \in \mathcal{A}$
Donc $\mathcal{A}$ est une algèbre.

I.2.11. **Définition :** Soit ξ une partie non vide de $\mathcal{P}(X)$. L'algèbre $\mathcal{A}$ de parties de X engendrée par ξ est l'intersecion $\mathcal{A}(\xi)$ de toutes les algèbres de parties de X contenant ξ :

$$\mathcal{A}(\xi) = \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i \quad \text{où} \quad \{\mathcal{A}_i \ : i \in I\} = \{\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) : \ \mathcal{A} \text{ algèbre et } \xi \subset \mathcal{A}\}$$

I.2.12. **Proposition :** Soit $\mathcal{R}$ un anneau de parties de X.
$\mathcal{A}(\mathcal{R}) = \{E \subset X : E \in \mathcal{R} \text{ ou } X \diagdown E \in \mathcal{R}\}$

I-3 σ-ANNEAU

I.3.1. **Définition :** Une partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(X)$ est un σ-anneau si :

i) $\mathcal{T}$ est un anneau de parties de X.

ii) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}, \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$

I.3.2. **Proposition :** Soient $\mathcal{T}$ un σ-anneau de parties de X et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$. Alors :

a) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$

b) $\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n = \lim_{n\to+\infty} \sup A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{k\geq n} A_k \right) \in \mathcal{T}$

c) $\underline{\lim_{n\to+\infty}} A_n = \lim_{n\to+\infty} \inf A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{k\geq n} A_k \right) \in \mathcal{T}$

Preuve

a) Posons $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

$$\forall x \in X , \quad x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \Longleftrightarrow \begin{cases} \cdot & x \in A \\ \cdot\ \forall n \in \mathbb{N}, \ x \in A_n \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \cdot & x \in A \\ \cdot \forall n \in \mathbb{N}, \ x \notin A \diagdown A_n \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \cdot & x \in A \\ \cdot x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \diagdown A_n) \end{cases} \Longleftrightarrow x \in A \diagdown \left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \diagdown A_n) \right]$$

Donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A \diagdown \left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \diagdown A_n) \right] \in \mathcal{T}$.

b) et c) Découlent immédiatement de a) et du ii) de la définition **I.2.1**

I.3.3 **Proposition :** Soit $\{\mathcal{T}_i : i \in I\}$ un ensemble de σ-anneaux de parties de X. $\mathcal{T} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i = \{A \subset X : \forall i \in I, \quad A \in \mathcal{T}_i\}$ est un σ-anneau de parties X.

Preuve

· D'après **I.2.4,** $\mathcal{T}$ est un anneau

· Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$

$$[\forall i \in I, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ \ A_n \in \mathcal{T}_i] \Longrightarrow \left[\forall i \in I, \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}_i\right] \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$$

Donc $\mathcal{T}$ est un σ-anneau.

I.3.4 **Définition :** Soit ξ une partie non vide de $\mathcal{P}(X)$. Le σ-anneau de parties de X engendré par ξ est l'intersection $\sigma - \mathcal{R}(\xi)$ de tous les σ-anneaux de parties de X contenant ξ :

$$\sigma - \mathcal{R}(\xi) = \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i \quad \text{où} \quad \{\mathcal{T}_i : i \in I\} = \{\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X) : \mathcal{T} \quad \sigma - \text{anneau}, \ \xi \subset \mathcal{T}\}$$

I.3.5 **Proposition :** Soit ξ une partie non vide de $\mathcal{P}(X)$. Pour tout élément A de $\sigma - \mathcal{R}(\xi)$, il existe une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de ξ telle que $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

Preuve :

Posons $\mathcal{T} = \left\{E \subset X : \exists (E_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \xi^{\mathbb{N}} \ \text{ avec } E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right\}$

· $\phi \neq \xi \subset \mathcal{T} \Longrightarrow \mathcal{T} \neq \phi$

· Soient $A, B \in \xi$

$$\exists (E_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \xi^{\mathbb{N}}, \quad \exists (F_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \xi^{\mathbb{N}} \ \text{ avec } \quad A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \ \text{ et } \ B \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$$

$$A \setminus B \subset A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{T}$$

· Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \xi^{\mathbb{N}}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \left(E_{nk}\right)_{k\in\mathbb{N}} \in \xi^{\mathbb{N}}$ avec $\quad A_n \subset \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} E_{nk}$

$$\left.\begin{array}{c} \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcup\limits_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} E_{nk} \\ \mathbb{N}^2 \text{ dénombrable} \\ \forall\,(n,k)\in\mathbb{N}^2,\quad E_{nk}\in\xi \end{array}\right\} \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$$

Donc $\mathcal{T}$ est un σ-anneau contenant ξ.
Par suite $\sigma - \mathcal{R}\left(\xi\right) \subset \mathcal{T}$.

I.3.6 **Définition :** Une partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}\left(X\right)$ est une σ-algèbre (tribu) de parties de X si :

i) $\mathcal{T}$ est un σ-anneau de parties de X
ii) $X \in \mathcal{T}$.

I.3.7 **Remarque :** Une tribu de parties de X est une algèbre de parties de X qui est stable par réunion dénombrable.

I.3.8 **Exemples :** $\{\phi, X\}$, $\mathcal{P}\left(X\right)$, $\{E \subset X : E$ dénombrable ou $X \diagdown E$ dénombrable$\}$ sont des tribus de parties de X.

I.3.9 **Proposition :** Soit $\{\mathcal{T}_i : i \in I\}$ un ensemble de tribus de parties de X.

$$\mathcal{T} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i = \{E \subset X : \forall i \in I \quad E \in \mathcal{T}_i\}$$

est une tribu de parties de X.

Preuve : D'après **I.3.3**, $\mathcal{T}$ est un σ-anneau de parties de X.

$$[\forall i \in I, \quad X \in \mathcal{T}_i] \Longrightarrow X \in \mathcal{T}.$$

Donc $\mathcal{T}$ est une tribu de parties de X.

I.3.10 **Définition :** Soit ξ une partie non vide de $\mathcal{P}\left(X\right)$. La σ-algèbre (tribu) de parties de X engendrée par ξ est l'intersection $\sigma - \mathcal{A}\left(\xi\right)$ de toutes les σ-algèbres de parties de X contenant ξ.

$$\sigma - \mathcal{A}\left(\xi\right) = \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i \quad \text{où} \quad \{\mathcal{T}_i : i \in I\} = \{\mathcal{T} \subset \mathcal{P}\left(X\right) : \mathcal{T} \text{ tribu}, \xi \subset \mathcal{T}\}$$

I.3.11 **Exemple :** Supposons que X est un espace topologique. La σ-algèbre engendrée par la famille $\mathcal{O}\left(X\right)$ des sous-ensembles ouverts de

X est appelée la σ-algèbre de Borel [σ-algrèbre des boreliens] de X et notée $\mathcal{B}(X)$.

I.3.12 Proposition : La σ-algèbre $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ des boreliens de $\mathcal{R}$ est engendrée par chacune des parties suivantes de $\mathcal{P}(\mathcal{R})$

a) $\mathcal{J}(\mathbb{R}) = \{[a,b[: -\infty < a \leq b < +\infty\}$

b) $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{]a,+\infty[: a \in \mathbb{R}\}$

Preuve :

a) · Soit $[a,b[\in \mathcal{J}(\mathbb{R}) \setminus \{\phi\}$

$$\left.\begin{array}{ll} & [a,b[= \bigcap\limits_{n\geq 1} \left]a-\frac{1}{n},b\right[\\ \forall n \in \mathbb{N}^* & \left]a-\frac{1}{n},b\right[\in \mathcal{B}(\mathcal{R}) \end{array}\right\} \Longrightarrow [a,b[\in \mathcal{B}(\mathcal{R})$$

Donc $\mathcal{J}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{R})$ et par suite $\sigma - \mathcal{A}(\mathcal{J}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$

· Soit O un sous-ensemble ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

Il existe une suite disjointe $(I_k)_{k\in K}$ d'intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ telle que $0 = \bigcup\limits_{k\in K} I_k$.

$$\begin{array}{ll} \forall k \in K, & I_k =]a_k,b_k[\text{ avec } a_k,b_k \in \mathbb{R} \Longrightarrow I_k = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left[a_k + \frac{b_k-a_k}{n}, b_k\right[\\ & I_k =]a_k,+\infty[\text{ avec } a_k \in \mathbb{R} \Longrightarrow I_k = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left[a_k + \frac{1}{n}, a_k+n\right[\\ & I_k =]-\infty,b_k[\text{ avec } b_k \in \mathbb{R} \Longrightarrow I_k = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} [+b_k - n, b_k[\end{array}$$

Donc $\forall k \in K \quad I_k \in \sigma - \mathcal{A}(\mathcal{J}(\mathbb{R}))$

K étant dénombrable, $O = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} I_k \in \sigma - \mathcal{A}(\mathcal{J}(\mathbb{R}))$.

Celà étant vrai pour tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma - \mathcal{A}(\mathcal{J}(\mathbb{R}))$.

En définitive $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma - \mathcal{A}(\mathcal{J}(\mathbb{R}))$.

b) $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{]a,+\infty[: a \in \mathbb{R}\}$

· Chaque élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ étant un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}$, nous avons : $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et par suite $\sigma - \mathcal{A}(\mathcal{D}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$

· Soit $[a,b[\in \mathcal{J}(\mathbb{R}) \setminus \{\phi\}$

$$\forall n,m \in \mathbb{N}^*, \left]a-\frac{1}{n}, \quad b-\frac{b-a}{m}\right] = \left]a-\frac{1}{n},+\infty\right[\setminus \left]b-\frac{b-a}{m},+\infty\right[\in \sigma{-}\mathcal{A}(\mathcal{D}(\mathbb{R}))$$

I.3.13 Proposition : La σ-algèbre $\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$ des boreliens de $\overline{\mathbb{R}}$ est engendrée par chacune des parties suivantes de $\mathcal{P}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$.

a) $\mathcal{J}\left(\bar{\mathbb{R}}\right) = \{[a, b[- \infty \leq a \leq b < +\infty\}$
b) $\mathcal{D}\left(\bar{\mathbb{R}}\right) = \{]a, +\infty[: -\infty < a < +\infty\}$

Preuve :
Démonstration similaire à celle de **I.3.12**.

I.3.14. Proposition : Supposons que pour tout $\lambda \in \Lambda, \mathcal{T}_\lambda$ est une σ-algèbre de parties de X_λ,

$$\begin{aligned} p_\lambda : \quad X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha &\longrightarrow X_\lambda \\ x = (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} &\longmapsto x_\lambda \end{aligned}$$

est la projection canonique. La σ-algèbre produit des $\mathcal{T}_\lambda\,(\lambda \in \wedge)$ est la σ-algèbre $\bigotimes_{\lambda\in\wedge} \mathcal{T}_\lambda$ de parties de X engendrée par $\left\{p_\lambda^{-1}(E_\lambda) : \lambda \in \Lambda \text{ et } E_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda\right\}$.

I.3.15 Proposition : Supposons que Λ est dénombrable (fini ou infini). Si pour tout élément λ de Λ, $\mathcal{T}_\lambda$ est une σ-algèbre de parties de X, alors $\bigotimes_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{T}_\lambda$ est engendrée par $\left\{\prod_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda : \forall\lambda \in \Lambda, \quad E_\lambda \in T_\lambda\right\} = \xi$

Preuve :
· Supposons que $E = \prod_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda \in \xi$

$$\left.\begin{array}{c} E = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} p_\lambda^{-1}(E_\lambda) \\ \\ \Lambda \text{ dénombrable} \\ \\ \forall\lambda \in \Lambda,\ p_\lambda^{-1}(E_\lambda) \in \bigotimes_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{T}_\lambda \end{array}\right\} \Longrightarrow E \in \bigotimes_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{T}_\lambda$$

Donc $\xi \subset \bigotimes_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{T}_\lambda$
· $\forall\lambda \in \Lambda \quad \forall E_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda \quad p_\lambda^{-1}(E_\lambda) = \prod_{\alpha\in\Lambda} A_\lambda$ avec

$$A_\alpha = \begin{cases} E_\lambda & \text{si } \alpha = \lambda \\ X_\lambda & \text{si } \alpha \neq \lambda \end{cases}$$

Donc $\forall\lambda \in \Lambda \quad \forall E_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda \quad p_\lambda^{-1}(E_\lambda) \in \xi$.
c'est-à-dire $\left\{p_\lambda^{-1}(E_\lambda) : \lambda \in \Lambda, \quad E_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda\right\}$ est inclus dans ξ et par suite $\bigotimes_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{T}_\lambda$ est incluse dans la σ-algèbre de parties de X engendrée par ξ.

I.4 CLASSE MONOTONE

I.4.1. Définition : Une partie $\mathfrak{m}$ de $\mathrm{P}(X)$ est une classe monotone de parties de X si :

i) $\mathfrak{m} \neq \phi$

ii) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{m}^{\mathbb{N}},\ [\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n \subset A_{n+1}] \Longrightarrow \left[\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{m}\right]$

iii) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{m}^{\mathbb{N}},\ [\forall n \in \mathbb{N} \quad A_{n+1} \subset A_n] \Longrightarrow \left[\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{m}\right]$

I.4.2. Remarques :

a) Tout σ-anneau de parties de X est une classe monotone de parties de X.

b) Si $\mathcal{R}$ est un anneau et une classe monotone de parties de X alors $\mathcal{R}$ est un σ-anneau de parties de X.

En effet, supposons que $\mathcal{R}$ est un anneau et une classe monotone de parties de X. Alors

i) $\mathcal{R}$ est un anneau de parties de X

ii) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{m}^{\mathbb{N}}$

$$(B_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)_{n\in\mathbb{N}} \Longrightarrow \begin{cases} (B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}^N \\ \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ B_n \subset B_{n+1} \\ \\ \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n \end{cases} \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$$

Donc $\mathcal{R}$ est un σ-anneau de parties de X.

I.5. ESPACE MESURE

X est un ensemble non vide

I.5.1. MESURE POSITIVE :

I.5.1.1. Définition : Soit $\mathcal{J}$ un semi-anneau de parties de X tel que $\phi \in \mathcal{J}$; une application $\mu : \mathcal{J} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ est une mesure positive si :

i) $\mu(\phi) = 0$

ii) Pour toute suite disjointe $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{J}$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n \in \mathcal{J} \Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(S_n)$$

[μ est dénombrablement additive ou encore σ-additive].

Si $\mu : \mathcal{J} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ est une mesure positive alors $(X, \mathcal{J}, \mu)$ est appelé un espace mesuré.

I.5.1.2. **Exemples :**

a)

$$\begin{array}{ccc} P(X) & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ S & \longmapsto & 0 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cl} P(X) & \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \\ S & \longmapsto \mu(S) = \end{array} \begin{cases} 0 \text{ si } S = \phi \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}$$

sont des mesures positives sur $(X, P(X))$.

b) Soit x un élément de X

$$\begin{array}{rll} \varepsilon_x : & P(X) & \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \\ & S & \longmapsto \varepsilon_x(S) = \chi_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si x } \in S \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

est une mesure positive sur $(X, P(X))$ appelée la mesure de Dirac au point x.

c)

$$\begin{array}{rll} c : & P(X) & \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \\ & S & \longmapsto c(S) = \begin{cases} \text{nombre d'éléments de } S \text{ si } S \text{ est fini} \\ +\infty \quad \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

est une mesure positive sur $(X, P(X))$ appelée la mesure de comptage.

d) Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$

$$\begin{array}{rll} \mu : & P(X) & \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \\ & S & \longmapsto \mu(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } S = \phi, \\ \sum\limits_{x \in S} f(x) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

est une mesure positive sur $(X, \mathcal{P}(X))$

Remarquons que $\mu = \sum\limits_{x \in X} f(x)\, \varepsilon_x$. La mesure μ est dite discrète.

e) Considérons $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante et continue à gauche.

$$\begin{array}{rl} \mu : & \mathcal{J}(\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \\ & [a, b[\longmapsto \mu([a, b[) = F(b) - F(a) \end{array}$$

est une mesure positive $(\mathbb{R}, \mathcal{J}(\mathbb{R}))$.

f) En posant $F(x) = x$ dans l'exemple e) nous obtenons que la longueur

$$\begin{array}{rl} \ell : & \mathcal{J}(\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \\ & [a, b[\longmapsto \ell([a, b[) = b - a \end{array}$$

est une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{J}(\mathbb{R}))$.

g) Considérons $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante et continue à droite.

$$\mu : \quad \{]a,b] : -\infty < a \leq b < +\infty\} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$
$$]a,b] \longmapsto \mu(]a,b]) = F(b) - F(a)$$

est une mesure positive.

I.5.1.3. <u>Définition</u> : Soit $(X, \mathcal{J}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu \geq 0$.

a) μ est bornée si $\|\mu\| = \sup\{\mu(S) : S \in \mathcal{J}\} < +\infty$.

b) μ est une probabilité si $\|\mu\| = 1$

c) μ est finie si : $\forall S \in J,\ \mu(S) < +\infty$

d) μ est σ-finie si : $\forall S \in \mathcal{J}$, $\exists (E_n) \in \mathcal{J}^{\mathbb{N}}$ avec $S \subset \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} E_n$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mu(E_n) < +\infty$

e) μ est semi-finie si : $\forall\ S \in \mathcal{J},\ \mu(S) = \sup\{\mu(E) : E \in \mathcal{J},\ E \subset S, \mu(E) < +\infty\}$

I.5.1.4. <u>Proposition</u> : Considérons un espace mesuré $(X, \mathcal{J}, \mu)$ avec $\mu \geq 0$.

Alors

a) μ est additive : pour toute suite finie disjointe $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ de $\mathcal{J}$:

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{J} \Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

b) μ est monotone : $\forall A, B \in \mathcal{J} \quad A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

c) μ est σ-sous-additive :

$$\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{J}^{\mathbb{N}}, \qquad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{J} \Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

d) Pour toute suite croissante $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{J}$:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{J} \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$$

e) Pour toute suite décroissante $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{J}$ telle que $\mu(A_0) < +\infty$:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{J} \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$$

Preuve :

a) Soit $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ une suite finie disjointe d'éléments de $\mathcal{J}$ telle que

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A \in \mathcal{J}$$

Posons : $\forall k \in \mathbb{N} \quad B_k = \begin{cases} A_k & \text{si } k \in \{1,2,...,n\} \\ \phi & \text{sinon} \end{cases}$

$(B_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite disjointe d'éléments de $\mathcal{J}$ telle que $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} B_k = A \in \mathcal{J}$

En outre : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mu(B_k) = \begin{cases} \mu(A_k) & \text{si } k \in \{1,2,...,n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Donc $\mu(A) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k)$

b) Soient $A, B \in \mathcal{J}$ avec $A \subset B$.
Il existe une suite finie disjointe $(S_k)_{1\leq k\leq n}$ d'éléments de $\mathcal{J}$
telle que $B \diagup A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} S_k$.
Donc $B = A \cup \left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} S_k\right)$ avec $\forall k \in \{1,2,...n\}, \ A \cap S_k = \phi$.
D'où, d'après a), $\mu(B) = \mu(A) + \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(S_k) \geq \mu(A)$

c) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{J}$ telle que $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}^{n} A_n \in \mathcal{J}$.
Considérons la suite disjointe $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$B_0 = A_0, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ B_n = A_n \diagup \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$$

Pour tout entier $n \geq 0$ il existe une suite finie disjointe $(S_{nk})_{1\leq k\leq P_n}$ d'éléments de $\mathcal{J}$ telle que

$$\bigcup_{k=1}^{p_n} S_{nk} = B_n \subset A_n$$

$(S_{nk})_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ 1\leq k\leq P_n}}$ est une suite disjointe d'éléments de $\mathcal{J}$ telle que
$\bigcup\limits_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ 1\leq k\leq p_n}}^{n} S_{nk} = A.$

μ étant une mesure positive sur $(X, \mathcal{J})$ nous avons :

$$\mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left[\sum_{k=1}^{p_n} \mu(S_{nk})\right] \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

d) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{J}$ telle que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{J}$.
Avec les notations du c) nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad B_n = A_n \diagup A_{n-1} \text{ et } A_n = \bigcup_{m=0}^{n} B_m = \bigcup_{m=0}^{n} \left[\bigcup_{1\leq k\leq p_n} S_{mk}\right]$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mu(A_n) = \sum_{m=0}^{n} \left[\sum_{k=1}^{p_n} \mu(S_{mk})\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \left[\sum_{k=1}^{p_n} \mu(S_{nk})\right] = \mu(A)$$

e) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{J}$ telle que

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{J} \text{ et } \mu(A_0) < +\infty$$

Considérons la suite disjointe $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ B_n = A_n \diagup A_{n+1}$.
Pour tout entier $n \geq 0$, nous avons :

$$A \cap B_n = \phi \text{ et } B_n = \bigcup_{k=1}^{p_n} S_{nk} \text{ ou } (S_{nk})_{1\leq k\leq p_n}$$

est une suite finie disjointe d'éléments de $\mathcal{J}$;

$$A_n = A \cup \left[\bigcup_{m\geq n} B_n\right].$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mu(A_n) = \mu(A) + \sum_{m\geq n} \left[\sum_{k=1}^{p_m} \mu(S_{nk})\right]$$

En outre,

$$+\infty > \mu(A_0) = \mu(A) + \sum_{m\geq 0} \left[\sum_{k=1}^{p_m} \mu(S_{nk})\right] \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{m\geq n} \left[\sum_{k=1}^{p_m} \mu(S_{nk})\right] = 0$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu(A_n)=\mu(A)$

I.5.1.5. **Proposition :** Soient $\mathcal{J}$ un semi-anneau de parties de X ayant ϕ comme élément et μ une mesure positive sur $(X,\mathcal{J})$. Il existe une mesure positive unique $\tilde{\mu}$ sur $(X,\mathcal{R},\mathcal{J})$ prolongeant μ.

I.5.1.6. **Définition :** Soit $(X,\mathcal{J},\mu)$ un espace mesuré avec $\mu\geq 0$.

Un sous-ensemble E de X est μ-négligeable s'il existe un élément S de $\mathcal{J}$ tel que : $E\subset S$ et $\mu(S)=0$.

$(X,\mathcal{J},\mu)$ est complet [μ est complète sur $(X,\mathcal{J})$] si tout sous ensemble μ-négligeable de X est un élément de $\mathcal{J}$.

I.5.2 MESURE EXTERIEURE

I.5.2.1. **Définition :** Une application $\tau:\mathcal{P}(X)\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}_+$ est mesure extérieure sur X si:

i) $\tau(\phi)=0$

ii) $A\subset B\subset X\Longrightarrow\tau(A)\leq\tau(B)$

iii) $\forall(A_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{P}(X)^{\mathbb{N}},\ \tau\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}^{n}A_n\right)\leq\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\tau(A_n)$.

I.5.2.2. **Remarque :** Soit τ une mesure extérieure sur X.

$$\forall A,E\in\mathcal{P}(X),\tau(E)\leq\tau(E\cap A)+\tau(E\diagup A).$$

Cela découle immédiatement de **II.2.1. (iii)**.

I.5.2.3. **Définition :** Soit τ une mesure extérieure sur X. Un sous-ensemble A de X est dit τ-mesurable au sens de Carathéodory (Constantin Carathéodory : mathématicien allemand d'origine grecque (1873-1950)) si

$$\forall E\subset X,\ \tau(E)=\tau(E\cap A)+\tau(E\diagup A)$$

I.5.2.4. **Remarques :** Soient τ une mesure extérieure sur X et $M\tau=\{A\subset X\diagup A\ \ \tau-\text{mesurable}\}$.

a) $\forall A\subset X,\ \tau(A)=0\Longrightarrow A\in M\tau$. En particulier $\phi\in M\tau$.

En effet si $\tau(A) = 0$ alors pour tout sous-ensemble E de X.

$\tau(E \cap A) = 0$
$\tau(E \cap A) + \tau(E/A) = \tau(E/A) \leq \tau(E) \leq \tau(E \cap A) + \tau(E/A)$
$\tau(E) = \tau(E \cap A) + \tau(E/A) = \tau(E/A)$

b) $\forall A \in M_\tau \quad X/A \in M_\tau$.
En effet si A appartient à M_τ alors :

$$\forall E \subset X \quad \tau(E) = \tau(E \cap A) + \tau(E/A).$$
$$\forall E \subset X \quad \tau(E) \leq \tau(E/(X/A)) + \tau(E \cap (X/A))$$

$$X/A \in M_\tau.$$

c) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M_\tau^{\mathbb{N}}, \ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in M_\tau^{\mathbb{N}}$ et $\forall E \subset X$

$$\tau(E) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \tau\left[\left(E/\bigcup_{n=0}^{j-1} A_n\right) \cap A_j\right] + \tau\left(E/\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

I.5.2.5. <u>Proposition</u> : Soit τ une mesure extérieure sur X.
a) L'ensemble M_τ des sous-ensembles τ-mesurables de X est une σ-algèbre de parties de X.
b) τ est une mesure positive complète sur (X, M_τ)

<u>Preuve</u> : La proposition est juste un résumé des remarques **II.2.4.**

I.5.2.6. <u>Définition</u> : Soit (X, d) un espace métrique. Une mesure extérieure τ sur X est dite métrique si :

$$\forall E, F \subset X, \ d(E, F) > 0 \Longrightarrow \tau(E \cup F) = \tau(E) + \tau(F)$$

I.5.2.7. <u>Lemme</u> : Soit τ une mesure extérieure métrique sur l'espace métrique (X, d). Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de sous-ensembles de X telle que :

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N}, \ d(A_n, A/A_{n+1}) > 0$$

Alors : $\tau(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \tau(A_n)$

Preuve :
a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n \subset A_{n+1} \subset A$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \tau(A_n) \leq \tau(A_{n+1}) \leq \tau(A)$$

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \tau(A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \tau(A_n) \leq \tau(A)$$

b) Posons : $B_0 = A_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad B_n = A_n \diagup A_{n-1}$
Alors :

$$\forall i,j \in \mathbb{N} \quad j+2 \leq i \Longrightarrow B_j \subset A_j \text{ et } B_i \subset A\diagup A_{i-1} \subset A\diagup A_{j+1} \Longrightarrow d(B_j, B_i) > 0$$

Donc

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \tau(A_{2m+1}) \geq \tau\left(\bigcup_{k=0}^{m} B_{2k+1}\right) = \sum_{k=0}^{m} \tau(B_{2k+1})$$

$$\tau(A_{2m}) \geq \tau\left(\bigcup_{k=0}^{m} B_{2k}\right) = \sum_{k=0}^{m} \tau(B_{2k})$$

Si :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \tau(B_{2k+1}) = +\infty \text{ ou } \sum_{k\in\mathbb{N}} \tau(B_{2k}) = +\infty \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} \tau(A_n) = +\infty \geq \tau(A)$$

Sinon :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \tau(A) = \tau\left[A_n \cup \left(\bigcup_{j>n} B_j\right)\right] \leq \tau(A_n) + \sum_{j>n} \tau(B_j)$$

$$\tau(A) \leq \lim_{n\to+\infty} \tau(A_n)$$

I.5.2.8. Proposition : Si τ est une mesure extérieure métrique sur l'espace métrique (X,d) alors tout borelien de (X,d) est τ-mesurable.

Preuve : Soit τ une mesure extérieure métrique sur l'espace métrique (X,d).
a) Considérons un sous-ensemble fermé F de (X,d) et un sous–ensemble A de X
Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A_n = \left\{x \in A\diagup F : d(x,F) \geq \frac{1}{n}\right\}$$

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad d\left(F \cap A, A_n\right) \geq \dfrac{1}{n}$
τ étant métrique, nous avons donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \tau\left(F \cap A\right) + \tau\left(A_n\right) = \tau\left[\left(F \cap A\right) \cup A_n\right] \leq \tau\left(A\right) \qquad (*)$$

Remarquons que $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \left\{x \in A \diagup F : d\left(x, F\right) > 0\right\} = A \diagup F$$

car F est fermé. En outre,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x \in \left(A \diagup F\right) \diagup A_{n+1} \Longrightarrow \exists z \in F : d\left(x, z\right) < \frac{1}{n+1}$$
$$\Longrightarrow \forall y \in A_n, \quad d\left(x, y\right) \geq d\left(y, z\right) - d\left(x, z\right)$$

$$\Longrightarrow \forall y \in A_n, \quad d\left(x, y\right) > \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^* d\left(A_n, \left(A \diagup F\right) \diagup A_{n+1}\right) \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0$$

Donc, d'après le lemme **II.2.7**, $\tau\left(A \diagup F\right) = \lim_{n\to+\infty} \tau\left(A_n\right)$
Par suite, d'après $(*)$, $\tau\left(F \cap A\right) + \tau\left(A \diagup F\right) \leq \tau\left(A\right)$
Donc F est τ-mesurable.
b) D'après a) $\mathcal{F} = \left\{F \subset X : F \text{ fermé de } \left(X, d\right)\right\} \subset M_\tau$
Donc : $\mathcal{B}\left(X, d\right) = \sigma - A\left(\mathcal{F}\right) \subset M_\tau$

I.5.3. <u>CONSTRUCTION DE MESURE</u> *(Méthode de Carathéodory)*

$\mathcal{S}$ est une partie non vide de $P\left(X\right)$ ayant ϕ comme élément
$\zeta : \mathcal{S} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ telle que $\zeta\left(\phi\right) = 0$

$$\forall\ A \subset X \qquad C\left(A, \mathcal{S}\right) = \left\{\left(E_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}} \diagup A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right\}$$

$$\tau\left(A\right) = \begin{cases} \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \zeta\left(E_n\right) \diagup \left(E_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in C\left(A, \mathcal{S}\right)\right\} & \text{si } C\left(A, \zeta\right) \neq \phi \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

I.5.3.1. <u>**Proposition :**</u> τ est une mesure extérieure sur X appelée la mesure extérieure engendrée par ζ.

<u>Preuve</u> :

i) Il est clair que τ est une application de $P(X)$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

ii) Posons : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad E_n = \phi$

Alors : $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C(\phi, \mathcal{S})$

Donc : $0 \leq \tau(\phi) \leq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \zeta(E_n) = 0$ c'est à dire $\tau(\phi) = 0$

iii) Soient $A \subset B \subset X$

Remarquons que $C(B, \zeta)$ est inclus dans $C(A, \mathcal{S})$. Donc

· $C(B, \zeta\mathcal{S}) = \phi \Longrightarrow \tau(B) = +\infty \geq \tau(A)$

· $C(B, \mathcal{S}) \neq \phi \Longrightarrow \tau(B) = \inf\left\{\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \zeta(E_n) \diagup (E_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C(B, \mathcal{S})\right\} \geq$
$\inf\left\{\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \zeta(E_n) : (E_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C(A, \mathcal{S})\right\} = \tau(A)$

Dans tous les cas : $\tau(A) \leq \tau(B)$

iv) Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $P(X)$ avec $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k = A$

Si $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \tau(A_k) = +\infty$, alors trivialement $\tau(A) \leq \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \tau(A_k)$

Supposons donc $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \tau(A_k) < +\infty$

Alors : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \tau(A_k) < +\infty$

Considérons un nombre réel $\varepsilon > 0$

$$\forall k \in \mathbb{N} \;\; \exists (E_{kn})_{n\in\mathbb{N}} \in C(A_k, \mathcal{S}) : \sum_{n\in\mathbb{N}} \zeta(E_{kn}) < \tau(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k-1}}$$

$(E_n)_{(k,n)n\in\mathbb{N}^2}$ étant un élément de $C(A, \mathcal{S})$, nous avons :

$$\tau(A) \leq \sum_{(k,n)\in\mathbb{N}^2} \zeta(E_{nk}) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \zeta(E_{kn}) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \left[\tau(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right]$$

$$\tau(A) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \tau(A_k) + \varepsilon$$

Cela étant vrai pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, nous obtenons :

$$\tau(A) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \tau(A_k)$$

Donc τ est une mesure extérieure sur X.

I.5.3.2. **<u>Remarque</u> :** Supposons que $\mathcal{S}$ est un semi-anneau de parties de X et ζ une mesure positive sur $(X, \mathcal{S})$. Notons χ l'anneau de

parties de X engendré par $\mathcal{S}$ et $\bar{\zeta}$ l'unique mesure positive sur (X,χ) prolongeant ζ [voir **II.1.5**].
Considérons un sous-ensemble A de X tel que $C(A,\mathcal{S}) \neq \phi$.

I.5.3.3. **Proposition :** Si $\mathcal{S}$ est un semi-anneau de parties de X et ζ une mesure positive sur (X,ζ) alors :

i) τ prolonge ζ

ii) $\sigma - A(\mathcal{S})$ est inclus dans M_τ.

Preuve

D'après la remarque **II.2.2**, nous pouvons supposer que $\mathcal{S}$ est un anneau.

a) Soit E un élément de $\mathcal{S}$.

Posons : $E_0 = E$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad E_n = \phi$

$(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $C(E,\mathcal{S})$ et par suite :

$$\tau(E) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \zeta(E_n) = \zeta(E)$$

$$\forall (E_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C(E,\mathcal{S}) \qquad \zeta(E) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \zeta(E_n)$$

Donc : $\zeta(E) \leq \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \zeta(E) : (E_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C(E,\mathcal{S})\right\} = \tau(E)$

En conclusion $\tau(E) = \zeta(E)$.

b) Considérons un élément E de $\mathcal{S}$ et une partie A de X.

Alors $\tau(A) \leq \tau(A\cap E) + \tau(A\diagup E)$

Donc si $\tau(A) = +\infty$ alors $\tau(A) = \tau(A\cap E) + \tau(A\diagup E)$

Considérons le cas où $\tau(A) < +\infty$

Soit un nombre réel $\varepsilon > 0$.

$$\exists \ (E_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C(A,\mathcal{S}) : \sum_{n\in\mathbb{N}} \zeta(E_n) < \tau(A) + \varepsilon$$

Remarquons que : $\begin{cases} \cdot \quad (E_n \bigcap E)_{n\in\mathbb{N}} \in C(A\bigcap E,\mathcal{S}) \quad \text{et} \quad (E_n\diagup E)_{n\in\mathbb{N}} \in C(A\diagup F,\mathcal{S}) \\ \cdot \quad \forall n\in\mathbb{N},\ \zeta(E_n) = \zeta(E_n\bigcap E) + \zeta(E_n\diagup E) \end{cases}$

Donc :

$$\begin{aligned} \tau(A\bigcap E) + \tau(A\diagup E) &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \zeta(E_n\bigcap E) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \zeta(E_n\diagup E) = \sum_{n\in\mathbb{N}} [\zeta(E_n\bigcap E) + \zeta(E_n\diagup E)] \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \zeta(E_n) < \tau(A) + \varepsilon \end{aligned}$$

Cela étant vrai pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, nous avons :

$$\tau(A\bigcap E) + \tau(A\diagup E) \leq \tau(A)$$

Par conséquent, dans tous les cas :

$$\tau(A) = \tau\left(A \bigcap E\right) + \tau(A \diagup E)$$

Cela étant vrai pour tout élément (E, A) de $\mathcal{S} \times P(X)$, la σ-algèbre M_τ contient $\mathcal{S}$ et par suite $\sigma - A(\mathcal{S})$

I.5.3.4. **Proposition :** Supposons que $\mathcal{S}$ est un semi-anneau de parties de X et ζ une mesure positive sur $(X, \mathcal{S})$. Si A est une partie de X τ-mesurable et τ−σ-finie $\left[\exists (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M_\tau : A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \tau(A_n) < +\infty.\right]$
Alors il existe deux éléments F et G de $\sigma - R(\mathcal{S})$ tels que :

$$F \subset A \subset G \quad \text{et} \quad \tau(G \diagup F) = 0$$

Preuve :
Soit A un élément de M_τ
a) Supposons que $\tau(A) < +\infty$

$$\forall\ k \in \mathbb{N}^*\ \ \exists \left(E_n^k\right)_{n\in\mathbb{N}} \in C(A, \mathcal{S}) : \tau(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \zeta\left(E_n^k\right) < \tau(A) + \frac{1}{k}$$

Posons : $\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}^*,\ G^k = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} E_n^k \\ G = \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} G^k \end{cases}$
Alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A \subset G^k \in \sigma{-}R(\mathcal{S}) \quad \text{et} \quad \tau(A) \leq \tau\left(G^k\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \tau\left(E_n^k\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \zeta\left(E_n^k\right) < \tau(A) + \frac{1}{k} < +\infty$$

$\left(G^k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ étant décroissante, nous avons :

$$A \subset G \in \sigma - R(\mathcal{S}) \quad \text{et} \quad \tau(A) \leq \tau(G) = \lim_{k\to+\infty} \tau\left(G^k\right) \leq \tau(A)$$

$$\tau(A) = \tau(G) = \tau(A) + \tau(G \diagup A)$$

$$\tau(G \diagup A) = 0$$

Remarquons que, d'après II.2.3, G est τ-mesurable et par suite $G \diagup A$ aussi l'est.
Donc d'après ce qui précède, il existe un élément H de $\sigma - R(\mathcal{S})$ tel que :

$$G \diagup A \subset H \quad \text{et} \quad \tau(H \diagup A) = \tau(G \diagup A) = 0 = \tau\left[H \diagup (G \diagup A)\right]$$

En outre,
$$\tau(H) = \tau(G\diagup A) + \tau[H\diagup(G\diagup A)] = 0$$

Posons : $F = G\diagup H.$
Alors F appartient à $\sigma - \mathcal{R}(\mathcal{S})$ et :

$$\begin{cases} F = G\diagup H \subset G\diagup(G\diagup A) = A \\ \tau(A) = \tau(F) + \tau(A\diagup F) \end{cases}$$

Puisque $A\diagup F = A\diagup(G\diagup H) \subset H$ et $\tau(H) = 0$, nous obtenons :

$$\tau(A\diagup F) = 0 \text{ et } \tau(A) = \tau(F)$$

En définitive, nous avons :

$$F, G \in \sigma - R(\mathcal{S}), \; F \subset A \subset G, \tau(G\diagup F) = \tau(G\diagup A) + \tau(A\diagup F) = 0$$

2) Supposons qu'il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de M_τ telle que :

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \tau(A_n) < +\infty$$

D'après 1) : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists F_n, \; G_n \in \sigma - \mathcal{R}(\mathcal{S})$:

$$F_n \subset A_n \subset G_n \text{ et } \tau(G_n\diagup F_n) = 0$$

Posons : $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ et $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$. Alors

$$F, G \in \sigma{-}\mathcal{R}(\mathcal{S}), \; F \subset A \subset G, \; G\diagup F = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n\right)\diagup F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (G_n\diagup F) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (G_n\diagup F_n)$$

et par suite $\tau(G\diagup F) = 0$.

I.5.3.5. <u>Exemples :</u>

a) Prenons $X = \mathcal{R}, \quad \mathcal{S} = \mathcal{J}(\mathbb{R})$

i) Considérons
$$\zeta =: \ell \quad \begin{array}{l} \mathcal{J}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ [a,b[\longmapsto b-a \end{array}$$

Notons : $\begin{cases} m^1 & \text{la mesure extérieure engendrée sur } \mathbb{R} \text{ par } \ell \\ \mathcal{M}(\mathbb{R}) & \text{la } \sigma\text{-algèbre des parties de } \mathbb{R}, \; m^1\text{-mesurables} \end{cases}$

Les éléments de $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ sont dits Lebesgue-mesurables.
La restriction de m^1 à $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Nous avons : $B(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R})$ et $\forall A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) \quad \exists F, G \in B(\mathbb{R}) : F \subset A \subset G$ et $m^1(G \diagdown F) = 0$.

(Voir **II.3.3** et **II.3.4**) ; $(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{R}), m^1)$ est un espace mesuré complet (voir II.2.5) m^1 est l'unique mesure positive sur $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ prolongeant $\zeta = \ell$ (voir **II.1.5**.).

ii) Considérons $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante, continue à gauche.

$$\zeta = \zeta_F : \quad \begin{array}{rl} \mathcal{J}(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ [a, b[& \longmapsto F(b) - F(a) \end{array}$$

Notons : $\begin{cases} \tau_F & \text{la mesure extérieure engendrée sur } \mathbb{R} \text{ par } \zeta_F \\ M_F & \text{la } \sigma\text{-algèbre des parties de } \mathbb{R},\ \tau_F\text{-mesurables} \end{cases}$

La restriction de τ_F à M_F est la mesure de Lebesgue-Stieljès associée à F sur $\mathbb{R}$.

Nous avons :

$B(\mathbb{R}) \subset M_F$ et $\forall A \in M_F \ \exists\ H, G \in B(\mathbb{R}) : H \subset A \subset G$ et $\tau_F(G \diagdown H) = 0$.

$(\mathbb{R},\ M_F,\ \tau_F)$ est un espace mesuré complet.
τ_F est l'unique mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ prolongeant ζ_F.

CHAPITRE II : APPLICATION MESURABLE ET INTEGRALE DE LEBESQUE

I - APPLICATION MESURABLE

X est un ensemble non vide.

I.1. <u>GENERALITES</u> :

II.1.1. **<u>Notation</u> :** Soient $f : X \longrightarrow Y$, $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$, $\xi \subset \mathcal{P}(Y)$

a) $f^{-1}(\xi) = \left\{ f^{-1}(E) : E \in \xi \right\}$
b) $f(\mathcal{S}) = \left\{ B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{S} \right\}$

II.1.2. **<u>Proposition</u> :** Soient $f : X \longrightarrow Y$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(Y)$.

a) Si $\mathcal{B}$ est une σ-algèbre de parties de Y alors $f^{-1}(\mathcal{B})$ est une σ-algèbre de parties de X.

b) Si $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre de parties de X alors $f(\mathcal{A})$ est une σ-algèbre de parties de Y.

<u>Preuve</u> :

a) $\mathcal{B}$ est une σ-algèbre de parties de Y .

· $Y \in \mathcal{B} \Longrightarrow X = f^{-1}(Y) \in f^{-1}(\mathcal{B})$ et $f^{-1}(\mathcal{B}) \neq \phi$

· Soit A un élément de $f^{-1}(\mathcal{B})$

$$\exists B \in \mathcal{B} : A = f^{-1}(\mathcal{B})$$

$$B \in \mathcal{B} \Longrightarrow Y \diagdown B \in \mathcal{B} \Longrightarrow X \diagdown A = X \diagdown f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \diagdown B) \in f^{-1}(\mathcal{B})$$

· Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$une suite d'éléments de $f^{-1}(\mathcal{B})$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \exists B_n \in \mathcal{B} : A_n = f^{-1}(\mathcal{B}_n)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad B_n \in \mathcal{B} \Longrightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{B} \Longrightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_n)$$

$$= f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) \in f^{-1}(\mathcal{B}).$$

Donc $f^{-1}(\mathcal{B})$ est une σ-algèbre de parties de X.

b) $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre de parties de X

· $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{A} \Longrightarrow Y \in f(\mathcal{A})$

· Soit B un élément de $f(\mathcal{A})$

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \Longrightarrow f^{-1}(Y \diagdown B) = X \diagdown f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \Longrightarrow Y \diagdown B \in f(\mathcal{A})$$

· Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élément de $f^{-1}(\mathcal{A})$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A} \Longrightarrow f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in f(\mathcal{A})$$

Donc $f(\mathcal{A})$ est une σ-algèbre de parties de Y.

II.1.3. **<u>Définition</u> :** Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. $f : X \longrightarrow Y$ est dite $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mesurable si :

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

$$f \text{ est } (\mathcal{A}, \mathcal{B}) - \text{mesurable} \Longleftrightarrow f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B} \subset f(\mathcal{A})$$

II.1.4. **<u>Exemples</u> :** Soit $(Y, \mathcal{B})$ un espace mesurable. Toute application $f : X \longrightarrow Y$ est $(\mathcal{P}(X), \mathcal{B})$-mesurable.

b) Supposons que $\mathcal{A} = \{\phi, X\}$ et $(Y, \mathcal{B})$ un espace mesurable tel que :

$$\forall y \in Y, \{y\} \in \mathcal{B}$$

$f : X \longrightarrow Y$ est $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mesurable si et seulement si elle est constante.

II.1.5. **<u>Proposition</u> :** Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables et ξ une partie de $\mathcal{P}(Y)$ engendrant $\mathcal{B}$. $f : X \longrightarrow Y$ est $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mesurable si et seulement si : $f^{-1}(\xi) \subset \mathcal{A}$.

<u>Preuve</u>

· $f\ (\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mesurable $\Longrightarrow \left.\begin{array}{c} f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A} \\ \xi \subset \mathcal{B} \end{array}\right\} \Longrightarrow f^{-1}(\xi) \subset \mathcal{A}$

· $f^{-1}(\xi) \subset \mathcal{A} \Longrightarrow \xi \subset f(\mathcal{A})$ σ-algèbre $\Longrightarrow \mathcal{B} = \sigma - \mathcal{A}(\xi) \subset f(\mathcal{A}) \Longrightarrow$ $f\ \ (\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mesurable.

II.1.6. <u>**Corollaire 1**</u> **:** Supposons que X et Y sont deux espaces métriques. Si $f : X \longrightarrow Y$ est continue alors elle est $(\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(Y))$ mesurable. [Borel-mesurable ou encore borelienne] .

<u>**Preuve**</u>

Posons $O(X) = \{A \subset X \diagup A \text{ ouvert de } X\}$ $O(Y) = \{B \subset Y \diagup B \text{ ouvert de } Y\}$. Alors $O(X) \subset \mathcal{B}(X)$ et $O(X)$ engendre $\mathcal{B}(X)$

$f : X \longrightarrow Y$ continue $\Longrightarrow f^{-1}(O(Y)) \subset O(X) \subset \mathcal{B}(X) \Longrightarrow f$ borelienne.

II.1.7. Proposition : Soient $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ et $(Z, \mathcal{T})$ trois espaces mesurables. Si $f : X \longrightarrow Y$ est $(\mathcal{A}, \mathcal{B})-$ mesurable et $g : Y \longrightarrow Z$ est $(\mathcal{B}, \mathcal{T})-$ mesurable alors $g \circ f : X \longrightarrow Z$ est $(\mathcal{A}, \mathcal{T})-$ mesurable.

Preuve

$$\left.\begin{array}{l} g \quad (\mathcal{B}, \mathcal{T}) - \text{mesurable} \\ \\ f \quad (\mathcal{A}, \mathcal{B}) - \text{mesurable} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} g^{-1}(\mathcal{T}) \subset \mathcal{B} \\ \\ f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A} \end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow (g \circ f)^{-1}(\mathcal{T}) = f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{T})) \subset \mathcal{A}$$

$\Rightarrow g \circ f \quad (\mathcal{A}, \mathcal{T})-$mesurable.

II.1.8. Proposition : Soient $(X, \mathcal{A}), (Y_i, \mathcal{B}_i)_{i \in I}$ des espaces mesurables, $Y = \prod\limits_{i \in I} Y_i$, $\mathcal{B} = \bigotimes\limits_{i \in I} \mathcal{B}_i$, $p_i : Y \longrightarrow Y_i$ la projection canonique de Y sur Y_i $(i \in I)$. $f : X \longrightarrow Y$ est $(\mathcal{A}, \mathcal{B})-$ mesurable si et seulement si, pour tout élément i de I, $f_i = p_i \circ f$ est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_i)-$ mesurable.

Preuve:

Rappelons que $\mathcal{B}$ est engendrée par

$$\mathcal{E} = \left\{p_i^{-1}(B_i) \diagup i \in I \text{ et } B_i \in \mathcal{B}_i\right\} = \underset{i \in I}{\cup} p_i^{-1}(B_i)$$

En particulier chaque p_i est $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_i)-$ mesurable.

a)

$$\left.\begin{array}{c} f \quad (\mathcal{A}, \mathcal{B}) \text{ - mesurable} \\ \\ \forall i \in I,\ p_i\ (\mathcal{B}, \mathcal{B}_i) - \text{mesurable} \end{array}\right\} \Rightarrow \forall i \in I,\ f_i = p_i \circ f \text{ est}$$

$(\mathcal{A}, \mathcal{B}_i)-$ mesurable.

b) $\forall i \in I,\ f_i = p_i \circ f \quad (\mathcal{A}, \mathcal{B}_i)-$ mesurable $\Rightarrow$

$\forall i \in I, \quad f^{-1}(p_i^{-1}(\mathcal{B}_i)) \subset \mathcal{A} \Rightarrow \quad f^{-1}(\mathcal{E}) = \cup\ f^{-1}(p_i^{-1}(\mathcal{B}_i)) \subset \mathcal{A} \Rightarrow f$ $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ $-$mesurable.

II.1.9. Proposition : Soient $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables, $f : X \longrightarrow Y$ $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$- mesurable et μ une mesure positive sur $(X, \mathcal{A})$. Alors

$$\begin{aligned} \mu^f : \mathcal{B} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \\ B &\longmapsto \mu\left[f^{-1}(B)\right] \end{aligned}$$

est une mesure positive sur $(Y, \mathcal{B})$ appelée la mesure image de μ par f.

Preuve

$\cdot \quad \left.\begin{array}{c} B \in \mathcal{B} \\ f \quad (\mathcal{A}, \mathcal{B})\text{-mesurable} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \\ \mu \quad \text{mesure positive sur } (X, \mathcal{A}) \end{array}\right\}$

$\Longrightarrow \mu^f B) = \mu\left[f^{-1}(B)\right] \in \overline{\mathbb{R}}_+$

$\cdot \quad \mu^f(\phi) = \mu\left[f^{-1}(\phi)\right] = \mu(\phi) = 0$

$\cdot$ Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite disjointe d'éléments de $\mathcal{B}$.

$\left(f^{-1}(B_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite disjointe d'éléments de $\mathcal{A}$.

Donc

$$\mu^f\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \mu\left[f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)\right] = \mu\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n)\right]$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left[f^{-1}(B_n)\right] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^f(B_n)$$

Par conséquent μ^f est une mesure positive sur $(Y, \mathcal{B})$.

II.1.10. Définition : Soient $(X, \mathcal{A})$, un espace mesurable et Y un espace métrique. $f : X \longrightarrow Y$ est dite $\mathcal{A}$-mesurable si elle est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(Y))$-mesurable.

II.2. FONCTION MESURABLE

$(X, \mathcal{A})$ est un espace mesurable.

II.2.1. Proposition : Soient D une partie partout dense de $\mathbb{R}$ et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) f est $\mathcal{A}$-mesurable

ii) $\forall d \in D,\ f^{-1}(]d, +\infty[) \in \mathcal{A}$

Preuve

Posons $\mathcal{D} = \{]d, +\infty[\,/\, d \in D\}$ et $\xi = \{]a, +\infty[\,/\, a \in \mathbb{R}\}$

· D'après **I.3.12**. $\sigma - \mathcal{A}(\xi) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

· Puisque $\mathcal{D} \subset \xi$, nous avons $\sigma - \mathcal{A}(\mathcal{D}) \subset \sigma - \mathcal{A}(\xi)$

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Il existe une suite décroissante $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}$ convergeant vers a.

$$]a, +\infty[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]d_n, +\infty[\in \sigma - \mathcal{A}(\mathcal{D})$$

Donc $\xi \subset \sigma - \mathcal{A}(\mathcal{D})$ et par suite $\sigma - \mathcal{A}(\xi) \subset \sigma - \mathcal{A}(\mathcal{D})$.

Par conséquent $\sigma - \mathcal{A}(\mathcal{D}) = \sigma - \mathcal{A}(\xi) = \mathcal{A}(\mathbb{R})$

La proposition découle donc de **II.1.5.**

II.2.2. **Proposition :** Soient D une partie partout dense de $\mathbb{R}$ et $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) f est $\mathcal{A}$-mesurable

ii) $\forall d \in D,\ f^{-1}(]d, +\infty[) \in \mathcal{A}$

Preuve

Similaire à celle de la proposition précédente en utilisant **I.3.13** au lieu de **I.3.12**.

II.2.3. **Remarque :** Si f et g sont deux applications $\mathcal{A}$-mesurables de X dans $\mathbb{C}$, c un nombre complexe et p un nombre réel strictement positif alors les applications cf, $|f|^p$ et fg sont $\mathcal{A}$-mesurables.

II.2.4. **Proposition :** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications $\mathcal{A}$-mesurables de X dans $\mathbb{R}$. Les applications

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n,\ \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n,\ \overline{\lim_{n\to+\infty}} f_n,\ \lim_{n\to+\infty} f_n, \text{sont } \mathcal{A}\text{-mesurables.}$$

Preuve

a) $\forall a \in \mathbb{R}$ $\left\{x \in X :\ \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) > \alpha\right\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X :\ f_n(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$.

Donc $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est $\mathcal{A}$-mesurable

b) $[\forall\, n \in \mathbb{N},\ f_n\ \ \mathcal{A}\text{-mesurable}] \Longrightarrow [\forall\, n \in \mathbb{N},\ f_n\ \ \mathcal{A}\text{-mesurable}]$
$\Longrightarrow \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n = -\sup_{n\in\mathbb{N}}(-f_n)$ $\mathcal{A}$-mesurable.

c) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq n \quad f_k$ $\mathcal{A}$-mesurable

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sup_{k\geq n} f_k \text{ et } \inf_{k\geq n} f_k \ \ \mathcal{A}\text{-mesurables}$$

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geq n} f_k\right) \text{ et } \underline{\lim_{n\to+\infty}} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\geq n} f_k\right) \text{ sont } \mathcal{A}\text{-mesurables.}$$

II.2.5. **Proposition :** Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'applications $\mathcal{A}$-mesurables de X dans $\overline{\mathbb{R}}$ [respectivement $\mathbb{C}$] convergeant simplement vers f alors f est $\mathcal{A}$-mesurable.

II.2.6. **Définition :** $s : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) est dite $\mathcal{A}$-étagée si elle est $\mathcal{A}$-mesurable et prend un nombre fini de valeurs.

II.2.7. **Notation :** $\xi(X, \mathcal{A}) = \left\{s : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ (ou } \mathbb{C}) \diagup s \ \ \mathcal{A}\text{-étagée}\right\}$

II.2.8. **Remarque :** Soit s un élément de $\xi(X, \mathcal{A})$ avec

· $s(X) \diagdown \{0\} = \{\alpha_k : 1 \leq k \leq n\}$

· $\forall k \in \{1, 2, ..., n\} \quad A_k = s^{-1}(\alpha_k)$.

Alors

· $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ est une suite finie disjointe d'éléments de $\mathcal{A}$.

· $s = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}$ [représentation standard de s]

II.2.9. **Proposition :** Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) $\mathcal{A}$-mesurable. Il existe une $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'applications $\mathcal{A}$-étagées de X dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) telle que :

i) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |s_n| \leq |s_{n+1}| \leq |f|$

ii) $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers f.

iii) si f est bornée la convergence de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est uniforme

iv) si $f \geq 0$ alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq s_n \leq s_{n+1} \leq f$.

II.2.10. **Proposition :** Supposons que :

· ξ est un semi-anneau de parties de X.

· $\zeta : \xi \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ est une mesure positive σ-finie sur (X, ξ)

· τ est la mesure extérieure engendrée sur X par $\zeta : \xi \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ et $\mathfrak{m}_\tau$ la σ-algèbre des sous-ensembles τ-mesurables de X.

Si $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) est $\mathfrak{m}_\tau$-mesurable alors il existe $g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ $\sigma - \mathfrak{R}(\xi)$-mesurable et vérifie $g = f$ τ-presque - partout.

Preuve

Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) $\mathfrak{m}_\tau$-mesurable.

1^{er} Cas : $f = \chi_A$ avec $A \in \mathfrak{m}_\tau$

D'après la proposition **II.3.4**, il existe deux éléments E et G de $\sigma - \mathfrak{R}(\xi)$ tels que : $E \subset A \subset G$, $\mathcal{T}(G \diagdown E) = 0$ et par suite $\tau(A \diagdown E) = 0$.

Posons $g = \varkappa_E$.

Alors $\begin{cases} g \text{ est } \sigma - \mathfrak{R}(\xi)\text{-mesurable} \\ \forall x \in X \diagdown (A \diagdown E) \quad g(x) = f(x) \end{cases}$

<u>2^e Cas</u> : $\quad f : X \longrightarrow \mathbb{C} \quad \mathfrak{m}_{\mathcal{T}}$-étagée.

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} \quad \text{avec} \quad (a_i, A_i) \in \mathbb{C} \times \mathfrak{m}_{\mathcal{T}} \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n$$

D'après le 1er cas, pour tout élément i de $\{1, 2, ..., n\}$, il existe $g_i : X \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que : g_i est $\sigma - \mathfrak{R}(\xi)$-mesurable, $\forall x \in X \diagdown N_i, \quad g(x) = \chi_{A_i}(x)$ avec $\mathcal{T}(N_i) = 0$.

Posons $g = \sum_{i=1}^{n} a_i g_i$ et $N = \bigcup_{i=1}^{n} N_i$.

Alors : $\begin{cases} g \text{ est } \sigma - \mathfrak{R}(\xi)\text{-mesurable} \\ \mathcal{T}(N) = 0 \\ \forall x \in X \diagdown N, \ g(x) = f(x) \end{cases}$

<u>3^e Cas</u> : Cas général.

D'après la proposition **III.2.9**, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications $\mathfrak{m}_{\mathcal{T}}$-étagée de X dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) convergeant simplement vers f et telle que :

$$\forall \ n \in \mathbb{N} \ |f_n| \leq |f_{n+1}| \leq |f| \, .$$

D'après le **2^e cas**, pour tout entier $n \geq 0$, il existe un sous-ensemble $\mathcal{T}$-négligeable N_n de X et une application $\sigma - \mathfrak{R}(\xi)$-mesurable g_n de X dans $\overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) telle que :

$$\forall x \in X \diagdown N_n \quad g_n(x) = f_n(x) \, .$$

Posons :

$$N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n \quad \text{et} \quad g = \left(\lim_{n\to+\infty} \inf \ \operatorname{Re} g_n \right) + i \left(\lim_{n\to+\infty} \inf \ \operatorname{Im} g_n \right)$$

Alors : $\begin{cases} g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ (ou } \mathbb{C}) \text{ est } \sigma - \mathfrak{R}(\xi)\text{-mesurable} \\ \mathcal{T}(N) = 0 \\ \forall x \in X \diagdown N, \ g(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x) = f(x) \end{cases}$

$II.3$ **- <u>INTEGRALE DE LEBESGUE</u>**

$\mathcal{A}$ est une σ-algèbre de parties de X et μ une mesure positive sur $(X, \mathcal{A})$

II.3.1 INTEGRALE D'UNE FONCTION POSITIVE

II.3.1.1. Notation :

$$\xi = \xi(X,\mathcal{A}) \; et \; \xi^{+} = \xi^{+}(X,\mathcal{A}) = \left\{ \varphi : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{+} / \varphi \in \xi(X,\mathcal{A}) \right\}$$

.

II.3.1.2. Définition : Soit s un élément de ξ^{+} de représentation standard $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$. L'intégrale de Lebesgue de φ par rapport à μ est:

$$\int \varphi(x)\, d\mu(x) = \int \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$$

II.3.1.3. Proposition : Soit (φ, ψ, c) un élément de $\xi^{+} \times \xi^{+} \times \mathbb{R}_{+}$. Alors :

a) $c\varphi \in \xi^{+}$ et $\int c\varphi d\mu = c \int \varphi d\mu$

b) $\varphi + \psi \in \xi^{+}$ et $\int (\varphi + \psi)\, d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu$

c) $\varphi \leq \psi \Longrightarrow \int \varphi d\mu \leq \int \psi d\mu$

d) $E \longmapsto \mu_{\varphi}(E) = \int_E \varphi d\mu = \int \varphi \chi_E d\mu$ est une mesure positive sur $(X,\mathcal{A})$.

II.3.1.4. Notation : $\mathcal{L}(X,\mathcal{A}) = \left\{ f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ (ou } \mathbb{C}) \; / f \; \mathcal{A}\text{-mesurable} \right\}$

$$\mathcal{L}^{+} = \mathcal{L}^{+}(X,\mathcal{A}) = \left\{ f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{+} : f \in \mathcal{L}(X,\mathcal{A}) \right\}$$

II.3.1.5. Définition : Soit f un élément de $\mathcal{L}^{+}$

a) L'intégrale de Lebesgue de f par rapport à μ est :

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int d\mu = \sup \left\{ \int \varphi d\mu / \varphi \in \xi^{+} \text{ et } 0 \leq \varphi \leq f \right\}$$

b) f est dite μ-intégrable sur un élément E de $\mathcal{A}$ si

$$\int_E f d\mu = \int f \chi_E d\mu < +\infty$$

II.3.1.6. Proposiion : Soient $f, g, f_n \, (n \in \mathbb{N})$ des éléments de $\mathcal{L}^{+}$ et c un nombre réel positif. Alors :

a) $cf \in \mathcal{L}^{+}$ et $\int cf d\mu = c \int f d\mu$

b) $f \leq g \Longrightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu$

c) $\left[\forall n \in \mathbb{N}, \ \ f_n \leq f_{n+1} \text{ et} \lim\limits_{n \to +\infty} f_n = f \right] \Longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$

(Théorème de la convergence monotone de Beppo-Levi $\equiv TCM$)

Preuve

a) Il clair que $c\ f$ appartient à $\mathcal{L}^+$

· Si $c = 0$ alors $cf = 0$ et $\int c\ f d\mu = 0 = 0 \int f d\mu = c \int f d\mu.$

· Supposons que $c > 0.$

Remarquons que $\forall \varphi, \psi \in \xi,$ $\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq f \Longleftrightarrow 0 \leq c\varphi \leq c\ f \\ 0 \leq \psi \leq c\ f \Longleftrightarrow 0 \leq \frac{1}{c}\psi \leq f \end{cases}$

Donc :

$$\int c\ f d\mu = \sup \left\{ \int \psi d\mu \diagup \psi \in \xi \ \text{ et } \ 0 \leq \psi \leq c\ f \right\} = \sup \left\{ \int c\varphi d\mu \diagup \varphi \in \xi \ \text{ et } \ 0 \leq \varphi \leq f \right\}$$

$$\int c\ f d\mu = \sup \left\{ c \int \varphi d\mu \diagup \varphi \in \xi \ \text{ et } \ 0 \leq \varphi \leq f \right\} = c \sup \left\{ \int \varphi d\mu \diagup \varphi \in \xi \ \text{ et } \ 0 \leq \varphi \leq f \right\}$$

$$\int c f d\mu = c \int f d\mu$$

b) Remarquons que

$$f \leq g \Longrightarrow \{\varphi \in \xi \diagup 0 \leq \varphi \leq f\} \subset \{\varphi \in \xi \diagup 0 \leq \varphi \leq g\}$$

Donc

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int \varphi d\mu \diagup \varphi \in \xi, \ 0 \leq \varphi \leq f \right\} \leq \sup \left\{ \int \varphi d\mu \diagup \varphi \in \xi, \ 0 \leq \varphi \leq g \right\} = \int g d\mu$$

Supposons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ f_n \leq f_{n+1} \ \text{ et } \ \lim_{n \to +\infty} f_n = f.$$

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \ f_n \leq f_{n+1} \leq f$

· $\forall n \in \mathbb{N}, \ \int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu \leq \int f d\mu$ [d'après b)]

$$\lim_{n \to +\infty} \int f_n d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu$$

· Soit $\alpha \in \left]0, 1\right[$

Considérons un élément φ de ξ^+ tel que $\varphi \leq f$ et posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ E_n = \{x \in X \diagup f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\}$$

$(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha\varphi\chi_{E_n} \leq f_n\chi_{E_n} \leq f_n \quad \text{et} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = X$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha \int \varphi\chi_{E_n} d\mu \leq \int f_n\chi_{E_n} d\mu \leq \int f_n d\mu$$

D'après **II.3**.1.3 d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int \varphi\chi_{E_n} d\mu = \int \varphi d\mu$

Donc : $\alpha \int \varphi d\mu \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$

Celà étant vrai pour tout élément φ de r tel que $\varphi \leq f$ et tout élément $\alpha \in]0,1[$, nous avons :

$$\int f d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$$

Donc finalement, $\int f d\mu = \lim\limits_{n\to+\infty} \int f_n d\mu..$

II.3.1.7. **<u>Corollaire</u> :** Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{L}^+$ alors :

$$\int \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \right) d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\int f_n d\mu \right)$$

II.3.1.8. **<u>Proposition</u> :** (Lemme de Fatou $\equiv L.F$). Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{L}^+(X, \mathcal{A})$ alors :

$$\int \left(\lim_{n\to+\infty} \inf \ f_n \right) d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \left(\int f_n d\mu \right)$$

<u>Preuve</u>

Considérons une suite d'éléments de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de $\mathcal{L}^+(X, \mathcal{A})$ et posons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g_n = \inf_{k\geq n} f_k$$

$(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{L}^+(X, \mathcal{A})$ convergeant simplement vers $\lim\limits_{n\to+\infty} \inf \ f_n$. Donc, d'après le théorème de la convergence monotone, nous avons :

$$\int \left(\lim_{n\to+\infty} \inf \ f_n \right) d\mu = \lim_{n\to+\infty} \inf \left(\int g_n d\mu \right)$$

Or :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall k \geq n, \quad g_n \leq f_k$$

$$\forall n\in\mathbb{N}\forall\ k\geq n\ \int g_n d\mu\leq\int f_k d\mu$$

$$\forall\ n\in\mathbb{N}\ \int g_n d\mu\leq\ \inf_{k\geq n}\int f_k d\mu$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int g_n d\mu\leq\lim_{n\to+\infty}\left[\inf_{k\geq n}\int f_k d\mu\right]=\lim_{n\to+\infty}\inf\left(\int f_n d\mu\right)$$

Donc

$$\int\left(\liminf_{n\to+\infty} f\right)d\mu\leq\liminf_{n\to+\infty}\left(f_n\right)d\mu$$

II.3.1.9. **<u>Définition</u> :** Nous dirons que la proposition P est vraie μ-presque partout sur X $[P$ vraie $\mu-p.p]$ ou encore que $P(x)$ est vraie en μ-presque pour tout point de $X\,[P(x)$ vraie en $\mu-p.t.x$ de $X]$ si $\{x\in X:\neg\ (P(x))\}$ est μ-négligeable.

II.3.1.10. **<u>Proposition</u> :** Soit f un élément de $\mathcal{L}^{+}(X,\mathcal{A})$

a) $\forall r\in\mathbb{R}_{+}^{*},\ \mu\left(\{x\in X\diagup f(x)\geq r\}\right)\leq\dfrac{1}{r}\int fd\mu$

b) $\int fd\mu=0\Longleftrightarrow f=0$ μ-presque partout $[\mu\left(\{x\in X\diagup f(x)\neq 0\}\right)=0]$

c) Si f est μ-intégrable alors :

· f est finie μ-presque partout

· $\{x\in X\diagup f(x)\neq 0\}$ est $\mu-\sigma$-finie

i.e. $\left[\{x\in X:f(x)\neq 0\}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}E_n \text{ avec } \forall\ n\in\mathbb{N}^*\ E_n\in A \text{ et } \mu(E_n)<+\infty\right]$

<u>Preuve</u>

a) Soit un nombre réel $r>0$

$$A_r=\{x\in X\diagup f(x)\geq r\}\in\mathcal{A}\ \text{ et }\ 0\leq r\chi_{A_r}\leq f\chi_{A_r}\leq f$$

Donc

$$r\mu(A_r)\leq\int fd\mu\ \text{ c-à-d. }\ \mu(A_r)\leq\frac{1}{r}\int fd\mu$$

Posons

$$P=\{x\in X\diagup f(x)\neq 0\}=\{x\in X\diagup f(x)>0\}$$

i) Supposons que

$$f=0\ \ \mu-p.p\ \ \text{ c-à-d. }\ \mu(P)=0$$

Soit φ un élément de ζ de représentation standard $\varphi=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{A_i}$ avec $0\leq\varphi\leq f$

$$\forall\ i\in\{1,2,...,n\}\ \ a_i>0\Longrightarrow A_i\subset P\Longrightarrow\mu(A_i)=0$$

Donc : $\int \varphi d\mu = 0$

Par suite

$$\int f d\mu = \sup\left\{\int \varphi d\mu \big/ \varphi \in \xi \;\text{ et }\; 0 \leq \varphi \leq f\right\} = 0$$

ii) Posons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E_n = \left\{x \in X \big/ f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}$$

$(E_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que :

$$P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\; \mu(E_n) \leq n \int f d\mu$$

· Supposons que : $\int f d\mu = 0$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mu(E_n) = 0$

Donc $\mu(P) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu(E_n) = 0$ et par suite $f = 0$, $\mu - p.p$

· Supposons que $\int f d\mu < +\infty$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mu(E_n) < +\infty$ et par suite P est σ-finie.

iii) Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \{x \in X \big/ f(x) \geq n\}$

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que :

$$\{x \in X : f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \;\text{ et }\; \forall n \in \mathbb{N}^*, \;\; \mu(A_n) \leq \frac{1}{n}\int f d\mu$$

Supposons que $\int f d\mu < +\infty$

Alors

$$\mu(\{x \in X : f(x) = +\infty\}) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = 0.$$

II.3.2 <u>INTEGRALE D'UNE FONCTION A VALEURS DANS $\overline{\mathbb{R}}$</u>

II.3.2.1. **<u>Notation</u> :** Soit : $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

· $f^+ = \max\{f, 0\}$ = partie positive de f

· $f^- = \max\{-f, 0\} = -\min\{f, 0\}$ = partie négative de f

II.3.2.2. **<u>Remarques</u> :** Soit : $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

a) $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$

b) f est $\mathcal{A}$-mesurabe $\Longleftrightarrow$ f^+ et f^-sont $\mathcal{A}$-mesurables.

II.3.2.3. **<u>Définition</u> :** Soit f un élément de $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{R}}} = \mathcal{L}\left(X, A, \overline{\mathbb{R}}\right) = \left\{g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \big/ g \in \mathcal{L}\right\}$

a) Si f^+ ou f^- est μ-intégrable alors l'intégrale de Lebesgue de f par rapport à μ est :

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

b) f est dite μ-intégrable si $\int f d\mu$ est un nombre réel.

c) f est dite μ-intégrable sur un élément A de $\mathcal{A}$ si $\int\limits_A f d\mu = \int f_{\chi A} d\mu$ appartient à $\mathbb{R}$.

II.3.2.4. Remarques :

1) Soient f et g deux éléments de $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{R}}}$.

a) f μ-intégrable $\Longleftrightarrow f^+$ et f^- μ-intégrables $\Longleftrightarrow |f|$ μ-intégrable.

b) f μ-intégrable $\Longrightarrow \left|\int f d\mu\right| \leq \int |f|\, d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu$.

c) f μ-intégrable et $|g| \leq |f| \Longrightarrow g$ μ-intégrable.

d) f μ-intégrable $\Longrightarrow \forall c \in \mathbb{R}, cf$ μ-intégrable et $\int cf d\mu = c \int f d\mu$.

En effet, pour tout nombre réel c, cf $\mathcal{J}$-mesurable et $|cf| = |c|\,|f|$

f μ-intégrable $\Longrightarrow |f|$ μ-intégrable $\Longrightarrow |cf|$ μ-intégrable $\Longrightarrow cf$ μ-intégrable.

$$\begin{aligned}
c &\geq 0 \Longrightarrow (cf)^+ = cf \text{ et } (cf)^- = cf^- \Longrightarrow \int cf d\mu = \int (cf)^+ d\mu - \int (cf)^- d\mu \\
&= \int cf^+ d\mu - \int cf^- d\mu
\end{aligned}$$

$$c\left[\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\right] = c \int f d\mu$$

$$\begin{aligned}
c &< 0 \Longrightarrow (cf)^+ = cf^- \text{ et } (cf)^- = -cf^+ \Longrightarrow \int cf = \int (cf)^+ d\mu - \int (cf)^- d\mu \\
&= \int -cf^- d\mu - \int -cf^+ d\mu \\
&= -c\left[\int f^- d\mu - \int f^+ d\mu\right] = c\left[\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\right] = c \int f d\mu
\end{aligned}$$

e) f μ-intégrables $\Longrightarrow \mu\left(\{x \in X : |f(x)| = +\infty\}\right) = 0$

En effet

$$\{x \in X : |f(x)| = +\infty\} = \left\{x \in X : f^+(x) = +\infty\right\} \cup \left\{x \in X : f^-(x) = +\infty\right\}.$$

D'après a) et la proposition **II.3.1.10 c)** nous avons :

f μ-intégrable $\Longrightarrow f^+, f^-$ μ-intégrables $\Longrightarrow$

$$\mu\left(\left\{x \in X : f^+(x) = +\infty\right\}\right) = 0 = \mu\left(\left\{x \in X / f^-(x) = +\infty\right\}\right)$$

2) Considérons sur $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{R}}}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par

$$\forall\ f, g \in \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{R}}},\quad f\ \mathcal{R}\ g \Longleftrightarrow f = g\ \ \mu - p.p$$

a) $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{R}}}$

b) $\forall f, g \in \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{R}}},\quad f = g\ \ \mu - p.p \Longleftrightarrow f^{+} = g^{+}\mu - p.p.$ et $f^{-} = g^{-}\ \mu - p.p. \Longrightarrow |f| = |g|\ \ \mu - p.p.$

c) $\forall f \in \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{R}}}, \int |f|\, d\mu = 0 \Longleftrightarrow f = 0\ \ \mu - p.p$

En effet d'après **II.3.1.10.b**)

$$\int |f|\, d\mu = 0 \Longleftrightarrow |f| = 0\ \ \mu - p.p$$

Par suite $\int |f|\, d\mu = 0 \Longleftrightarrow f = 0\ \ \mu - p.p$

d) $\forall f, g \in \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{R}}},\ f$ μ-intégrable et $g = f\ \ \mu - p.p \Longrightarrow g$ μ-intégrable et $\int g d\mu = \int f d\mu$

i) Supposons que $f, g \in \mathcal{L}^{+}, f$ μ-intégrable, $g = f\ \ \mu - p.p.$

Posons $D = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$.
Alors

$$\mu(D) = 0,\ g = g\chi_{X/D} + g\chi_D = f\chi_{X/D} + g\chi_D,\ f = f\chi_{X/D} + f\chi_D.$$

D'après la proposition **II.3.1.10 b)**

$$\int g\chi_D d\mu = 0 = \int f\chi_D d\mu$$

Par suite, d'après le corollaire **II.3.1.7**

$$\begin{aligned}\int g d\mu &= \int g\chi_{X/D} d\mu + \int g\chi_D d\mu = \int f\chi_{X/D} d\mu + \int g\chi_D d\mu = \int f\chi_{X/D} d\mu \\ &= \int f\chi_{X/D} d\mu + \int f\chi_D d\mu = \int f d\mu\end{aligned}$$

et $\int f d\mu < +\infty \Rightarrow \int g d\mu < +\infty$.

ii) Le cas général découle de i) et de b).

e) $\forall\ f, g \in \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{R}}},\ f = g\ \ \mu - p.p \Leftrightarrow \forall c \in \mathbb{R},\ cf = cg\ \ \mu - p.p.$

II.3.2.5. Notations

a) $L^1_{\mathbb{R}} = L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu) = \left\{[f] : f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)\right\}$

b) $\forall\ F \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu) = \int\limits_X F(x)\, d\mu(x) = \int F d\mu = \int f d\mu$

avec $[f] = F$

II.3.2.6. <u>Proposition</u> :

a) $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

b)

$$\begin{array}{ccc} L^1(X, \mathcal{A}, \mu) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ F & \longrightarrow & \|F\|_1 = \int |F|\, d\mu \end{array}$$

est une norme

c)

$$\begin{array}{ccc} L^1(X, \mathcal{A}, \mu) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ F & \longrightarrow & \int F d\mu \end{array}$$ est une forme linéaire positive et continue.

Sur $\left(L^1(X, \mathcal{A}, \mu), \|\|_1\right)$ on a :

· $\forall\ (c, F) \in \mathbb{R} \times L^1(X, \mathcal{A}, \mu)\ \ \int cF d\mu = c \int F d\mu$

· $\forall\ F, G \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)^2, \int (F + G)\, d\mu = \int F d\mu + G d\mu$

· $\forall\ F \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)\ \ F \geq 0 \Longrightarrow \int F d\mu \geq 0$

$$\left| \int F d\mu \right| \leq \int |F|\, d\mu = \|F\|_1$$

II.3.3 <u>ESPACE</u> $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$

II.3.3.1. <u>Notation</u> :

a) $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0,\ (X, \mathcal{A}) = \mathcal{L}_{0\overline{\mathbb{R}}} + i\mathcal{L}_{0\overline{\mathbb{R}}}$

b) $\forall f \in \mathcal{L}_0,\ [f] = \{g \in \mathcal{L}_0 : f = g\ \ \mu - p.p\}$

II.3.3.2. <u>Remarque</u> :

$$\forall f, g \in \mathcal{L}_0, \quad [f] = [g] \Longleftrightarrow [\operatorname{Re} f] = [\operatorname{Re} g] \quad \text{et} \quad [\operatorname{Im} f] = [\operatorname{Im} g] \Longleftrightarrow \left[\bar{f}\right] = [\bar{g}]$$

II.3.3.3. <u>Notation</u> :

a) $\forall\ f, g \in \mathcal{L}_0\ \ \operatorname{Re}[f] = [\operatorname{Re} f],\ \operatorname{Im}[f] = [\operatorname{Im} f],\ \ \left[\bar{f}\right] = \left[\bar{f}\right]$

$|[f]| = [|f|]$

b) $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(X,\mathcal{A},\mu) = \mathcal{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(X,\mathcal{A},\mu) + i\mathcal{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(X,\mathcal{A},\mu)$

c) $\forall f \in \mathcal{L}^1 \int f(x)\, d\mu(x) = \int f d\mu = \int \operatorname{Re} f d\mu + i \int \operatorname{Im} f d\mu$

d) $L^1 = L^1(X,\mathcal{A},\mu) = L^1_{\overline{\mathbb{R}}}(X,\mathcal{A},\mu) + iL^1_{\overline{\mathbb{R}}}(X,\mathcal{A},\mu) = \left\{[f] : f \in L^1(X,\mathcal{A},\mu)\right\}$

e) $\forall F \in L^1, \int F(x)\, d\mu(x) = \int f d\mu = \int F d\mu = \int \operatorname{Re} F d\mu + i \int \operatorname{Im} F d\mu$

f) $\forall (c,f) \in \mathbb{C}\times\mathcal{L}_0,\ c[f] = [cf]$

g) $\forall (f,g) \in \mathcal{L}^1,\ [f] + [g] = [f+g]$

II.3.3.4. **Proposition :** (Théorème de la convergence dominée de Lebesgue)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}_0$ convergeant μ-presque partout vers un élément f de $\mathcal{L}_0$. S'il existe un élément g de $\mathcal{L}^1$ tel que :

$\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leq g \quad \mu - p.p.$ Alors $f_n \ (n \in \mathbb{N})$ et f appartiennent à $\mathcal{L}^1$ et :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \int |f - f_n|\, d\mu = 0$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$

Preuve

a) $\forall n \in \mathbb{N} \left.\begin{array}{l} f_n \in \mathcal{L}_0 \\ |f_n| \leq g \in \mathcal{L}^1 \end{array}\right\} \Longrightarrow f_n \in \mathcal{L}^1$

$$\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leq g \\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n = f \quad \mu - p.p. \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} |f| \leq g \quad \mu - p.p. \\ f \in \mathcal{L}_0, g \in \mathcal{L}^1 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \in \mathcal{L}^1$$

b) **1^er^ Cas :** Supposons que f et $f_n\,(n \in \mathbb{N})$ sont à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Puisqu'elles sont μ-intégrables, il existe des applications μ-intégrables k, h, h_n $(n \in \mathbb{N})$ de X dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\left\{\begin{array}{c} k \in [g], h \in [f],\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ h_n \in [f_n] \\ \lim\limits_{n\to+\infty} h_n = h \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ |h_n| \leq k \ \text{ et } \ |h| \leq k \end{array}\right.$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ k + h_n \geq 0 \ et \ h - k_n \geq 0$$

D'après la proposition **IV.2.7.** et le lemme de Fatou,

$$\int k d\mu + \int h d\mu = \int (k+h)\, d\mu = \int \lim_{n\to+\infty} (k + h_n)\, d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \left[\int (k+h_n)\, d\mu\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \inf \left[\int k d\mu + \int h_n d\mu\right] = \int k d\mu + \lim_{n\to+\infty} \inf \int h_n d\mu$$

$$\int kd\mu - \int hd\mu = \int (k-h)\,d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int (k-h_n)\,d\mu \le \lim_{n\to+\infty} \inf \left[\int (k-h_n)\,d\mu \right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \inf \left[\int kd\mu - \int h_n d\mu \right] = \int kd\mu - \lim_{n\to+\infty} \sup \int h_n d\mu$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sup \int h_n d\mu \le \int hd\mu \le \lim_{n\to+\infty} \inf \int h_n d\mu$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} \int h_n d\mu = \int hd\mu$$

c'est- à - dire

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu = \int fd\mu$$

<u>2ème Cas</u> : Cas général

Nous avons :
$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} |f_n - f| = 0 & \mu - p.p. \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n - f| \le |f_n| + |f| \le 2g & \mu - p.p. \\ 2g \in \mathcal{L}^1 \end{cases}$$

Donc, d'après le 1er cas, nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} |f_n - f|\,d\mu = 0$$

II.3..3.5. <u>Corollaire 1</u> : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}_0$. Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \int |f_n|\,d\mu < +\infty$,

alors

i) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge μ-presque partout

ii) $\int \left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n \right) d\mu = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \int fd\mu \in \mathbb{C}$.

II.3..3.6. <u>Corollaire 2</u> : Soit (E,d) un espace métrique, A un sous-ensemble de E, t_0 un élément de l'adhérence $\bar{A}$ de A dans (E,d) et f une application de $X \times A$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ telle que :

i) $\forall\ t \in A,\ x \longmapsto f(x,t)$ appartienne à $\mathcal{L}_0$.

ii) $\lim\limits_{t\to t_0} f(x,t) = f_0(x)$ μ-presque partout.

iii) Il existe un élément g de $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ tel que, pour tout élément t de A, $|f(x,t)| \leq g(x)$ en μ-presque tout point x de X.

Alors f_0 est μ-intégrable et $\int\limits_X f_0(x)\, d\mu = \lim\limits_{t \to t_0} \int\limits_X f(x,t)\, d\mu$.

<u>Preuve</u>

Considérons une suite $(t_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de A convergeant vers t_0 et posons, pour tout entier $n \geq 1$: $f(x, t_n) = f_n(x)$.

Alors :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n \in \mathcal{L}_0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n = f_0 \quad \mu - p.p.$
- $\forall\ n \in \mathbb{N}^* \quad |f_n| \leq g \quad \mu - p; p;$
- $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$

D'après le théorème de la convergence dominée, f_0 est μ-intégrable et

$$\int\limits_X f_0(x)\, d\mu(x) = \lim_{n \to +\infty} \int\limits_X f_n(x)\, d\mu(x) = \lim_{n \to +\infty} \int\limits_X f(x, t_n)\, d\mu(x).$$

Cela étant vrai pour toute suite $(t_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de A convergeant vers t_0, nous avons :

$$\int\limits_X f_0(x)\, d\mu(x) = \lim_{n \to +\infty} \int\limits_X f(x,t)\, d\mu(x).$$

II.3..3.7. **<u>Corollaire 3</u> :** Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : X \times I \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) telle que :

i) $\forall\ t \in I,\ x \longmapsto f(x,t)$ appartient à $\mathcal{L}_0$.

ii) $\exists\ t_0 \in I : x \longmapsto f(x, t_0)$ appartient à $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{J}, \mu)$.

iii) $\exists\ N \in \mathcal{A} : \mu(N) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ défini en tout point (x,t) de $(X \diagup N) \times I$.

iv) $\exists g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) : \quad \forall t \in I \quad \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t) \leq g(x)$ en μ-presque tout point x de X...

Alors pour tout élément t de I, $x \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ est μ-intégrable et :

$$\int\limits_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, d\mu(x) = \frac{d}{dt} \int\limits_X f(x,t)\, d\mu(x).$$

<u>Preuve</u>

Soit t un élément de I.

Posons : $\forall\ t' \in I \diagdown \{t\} = A,\ \ \forall\ x \in X \diagdown N,\ \varphi(x, t') = \dfrac{f(x,t') - f(x,t)}{t' - t}$

Alors :

- $\forall t' \in A,\ x \longmapsto \varphi(x, t')$ appartient à $\mathcal{L}_0$.

· $\lim\limits_{t' \to t} \varphi(x,t') = \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ μ-presque partout.

· $\forall\ t' \in A,\ \ \forall\ x \in X \diagdown N,\ \exists \tau = (x,t') \in I : \varphi(x,t') = \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$

· $\forall\ t' \in A,\ \ |\varphi(x,t')| \leq g(x)$ en μ-presque tout point x de X et g est -intégrable.

Donc, d'après le corollaire **V.3.8**, $x \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ est μ-intégrable et :

$\int\limits_X \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, d\mu(x) = \lim\limits_{t' \to t} \int\limits_X \varphi(x,t')\, d\mu(x) = \lim\limits_{t' \to t} \int \dfrac{f(x,t') - f(x,t)}{t'-t} d\mu(x)$

Remarquons que :

$$\forall u \in I \diagdown \{t_0\},\ \ \forall x \in X \diagdown N,\ \ \exists v = v(x,u) \in I : f(x,u) = f(x,t_0) + (u - t_0)\frac{\partial f}{\partial t}(x,v)$$

$$\forall u \in I \diagdown \{t_0\},\ \ \ \forall x \in X \diagdown N, |f(x,u)| \leq |f(x,t_0)| + |u - t_0|\, g(x).$$

Or :

$$\forall u \in I \diagdown \{t_0\},\ \begin{cases} x \longmapsto f(x) \ \ \text{appartient à } \ \mathcal{L}_0 \\ x \longmapsto f(x,u) + |u-t_0|\, g(x) \ \ \text{appartient à } \ \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) \end{cases}$$

Donc : $\forall u \in I,\quad x \longmapsto f(x,u)$ est μ-intégrable.

Par conséquent :

$$\forall t' \in A,\ \int \frac{f(x,t') - f(x,t)}{t'-t} d\mu(x) = \frac{1}{t'-t}\left[\int\limits_X f\left(x,t'\right) d\mu(x) - \int\limits_X f(x,t)\, d\mu(x)\right]$$

et par suite :

$$\int\limits_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, d\mu(x) = \lim_{t' \to -t} \frac{1}{t'-t}\left[\int\limits_X f\left(x,t'\right) d\mu(x) - \int\limits_X f(x,t)\, d\mu(x)\right] = \frac{d}{dt}\int\limits_X f(x,t)\, d\mu(x)$$

II.3..3.10. **Proposition :** Soit une fonction μ-intégrable. Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe une application $\mathcal{A}$-étagée complexe φ_ε telle que :

$$|\varphi_\varepsilon| \leq |f|\ \ \mu - p.p.\ \ \text{et} \quad \int |f - \varphi_\varepsilon|\, d\mu < \varepsilon$$

Preuve : f étant μ-intégrable, il existe $h : X \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathcal{A}$-mesurable et telle que $h = f \quad \mu - p.p.$

Il existe une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications $\mathcal{A}$-étagée de X dans $\mathbb{C}$, convergeant simplement vers h et telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;\; |s_n| \leq |h|$$

h étant μ-intégrable, le théorème de la convergence dominée s'applique à $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donne

$$\lim_{n\to+\infty} \int |h - s_n|\, d\mu = 0$$

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists\, n \in \mathbb{N} : \;\forall\, n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \int |h - s_n|\, d\mu < \varepsilon$$

Il suffit de prendre, pour nombre réel $\varepsilon > 0, \varphi_\varepsilon = s_{n_\varepsilon}$.

II.3.4. INTEGRATION SUR $\mathbb{R}$

Nous supposons que $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ est la σ-algèbre des sous-ensembles Lebesgue mesurables de $\mathbb{R}$ et $\mu = m^1$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

II.3.4.1. Proposition : Soit f une fonction complexe bornée sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Si f est Riemann intégrable sur $[a, b]$ alors l'application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{, est } m^1\text{-intégrable [Lebesgue-intégrable]}$$

et $\displaystyle\int g dm^1 = \int_a^b f(x)\, dx.$

III. INTEGRATION SUR UN ESPACE PRODUIT

J est une σ-algèbre de parties de X et μ une mesure positive sur $(X,\mathfrak{J})$.
R est une σ-algèbre de parties de Y et v une mesure positive sur $(Y,\mathcal{R})$.

III.1. PRODUIT D'ESPACES MESURES

III.1.1. Notation Soit E une partie de $X \times Y$ et $f : X \times Y \longrightarrow Z$.

a) Pour tout élément x de X, la section en x de :

· E est $E_x = \{y \in Y \diagup (x,y) \in E\}$

· f est $\begin{array}{l} f_x : Y \longrightarrow Z \\ \quad y \longmapsto f_x(y) = f(x,y) \end{array}$

b) Pour tout élément y de Y, la section en y de :

· E est $E^y = \{x \in X \diagup (x,y) \in E\}$

· f est

$$\begin{array}{lll} f^y : X & \longrightarrow & Z \\ \quad x & \longmapsto & f^y(x) = f(x,y) \end{array}$$

III.1.2. Proposition : Soit (x,y) un élément de $X \times Y$.
Considérons

$$\varphi_x : \begin{array}{l} Y \longrightarrow X \times Y \\ b \longrightarrow (x,b) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} \varphi^y : X \longrightarrow X \times Y \\ \quad a \longmapsto (a,y) \end{array}$$

Alors, pour toute partie de $X \times Y$, $E_x = \varphi_x^{-1}(E)$ et $E^y = (\varphi^y)^{-1}(E)$

III.1.3. Proposition : Soient E, F, $E_n\, (n \in \mathbb{N})$ des parties de $X \times Y$ et (x,y) un élément de $X \times Y$. Alors :

a) $\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)_x = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_{nx}$ et $\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)^y = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n^y$

b) $\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)_x = \left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_{nx}\right)$ et $\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)^y = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n^y$

c) $(E \diagup F)_x = E_x \diagup F_x$ et $(E \diagup F)^y = E^y \diagup F^y$

d) $E \subset F \Longrightarrow E_x \subset F_x$ et $E^y \subset F^y$

Preuve

Conséquence immédiate de la remarque précédente.

III.1.4. **Notation :** $\Omega = \{A \times B \subset X \times Y \diagup (A,B) \in \mathfrak{J} \times \mathfrak{R}\}$

D'après les propositions **I.1.4** et **I.3.1** Ω est un semi-anneau de parties de $X \times Y$ engendrant $\mathfrak{J} \otimes \mathfrak{R}$. Nous allons définir sur $\mathfrak{J} \otimes \mathfrak{R}$ une mesure liée de façon "naturelle" à μ et v et examiner les liens entre l'intégration sur $X \times Y$ par rapport à cette mesure et l'intégration sur X et Y par rapport à μ et v respectivement.

III.I.5. **Proposition :**

$\begin{array}{c} \zeta : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \\ A \times B \longmapsto \mu(A)\, v(B) \end{array}$, est une mesure positive. En outre, si μ et v sont σ-finies sur $(X, \mathfrak{J})$ et $(Y, \mathfrak{R})$ respectivement, alors ζ aussi l'est sur $(X \times Y,\ \mathfrak{J} \otimes \mathfrak{R})$.

III.1.6. **Notation :** a) $\mu \times v$ est la mesure extérieure sur $X \times Y$ engendrée par ζ.

b) $\overline{\mathfrak{J} \otimes \mathfrak{R}}$ est la σ-algèbre des parties de X, $\mu \times v$-mesurables.

III.1.7. **Remarques**

a) $\Omega \subset \sigma - A(\Omega) = \mathfrak{J} \otimes \mathfrak{R} \subset \overline{\mathfrak{J} \otimes \mathfrak{R}}$ (voir **II.3.15** et **III.3.3**

b) $\left(X \times Y,\ \overline{\mathfrak{J} \otimes \mathfrak{R}},\ \mu\ x\ v\right)$ est un espace mesuré complet et $\mu \times v$ prolonge ζ.

(voir **III.2.5** et **III.3.3**).

c) Si μ et v sont σ-finies sur $(X, \mathfrak{J})$ et $(Y, \mathfrak{R})$ respectivement alors :

· $\mu \times v$ est l'unique mesure positive sur $(X \times Y,\ \mathfrak{J} \otimes \mathfrak{R})$ prolongeant ζ (voir **II.1.5** et **II.1.6**).

· $\forall\ E \in \overline{\mathfrak{J} \otimes \mathfrak{R}}\ \ \exists\ F, G \in \mathfrak{J} \otimes \mathfrak{R} : F \subset E \subset G$ et $\mu \times v\,(G \diagup F) = 0$ (voir **II.3.4**).

III.1.8. **Définition :**

a) La restriction de $\mu \times v$ à $\mathfrak{J} \otimes \mathfrak{R}$ est appelée la mesure produit de μ et v.

b) $(X \times Y,\ \mathfrak{J} \otimes \mathfrak{R}, \mu \times v)$ est l'espace mesuré produit de $(X, \mathfrak{J}, \mu)$ et $(Y, \mathfrak{R}, v)$.

III.1.9. **Proposition :**

a) $\forall\ E \in \mathfrak{J} \otimes \mathfrak{R}\ \ \forall (x,y) \in X \times Y\ \ (E_x, E^y) \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{J}$

b) Si $f : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) est $\mathfrak{J} \otimes \mathfrak{R}$-mesurable alors, pour tout élément (x,y) de $X \times Y$, f_x est $\mathfrak{R}$-mesurable.

Preuve

a) Posons $\mathcal{C} = \{E \subset X \times Y : \forall (x,y) \in X \times Y,\ (Ex, E^y) \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{J}\}$

· Soit $A \times B$ un élément de Ω.

$$\forall (x,y) \in X \times Y \quad (A \times B)_x = \begin{cases} B & \text{si } x \in A \\ \phi & \text{sinon} \end{cases},\ (A \times B)^y = \begin{cases} A & \text{si } y \in B \\ \phi & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\forall (x,y) \in X \times Y \quad ((A \times B)_x (A \times B)^y) \in \mathfrak{R} \otimes \mathfrak{J}$$

$$A \times B \in \mathcal{C}$$

Donc $\Omega \subset \mathcal{C}$

· Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}$.

$$\forall (x,y) \in X \times Y, \quad \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right)_x = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_{nx} \in \mathfrak{R} \text{ et } \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right)^y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n^y \in \mathfrak{J}$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{C}$$

· Soit E un élément de $\mathcal{C}$

$$\forall (x,y) \in X \times Y, \quad \begin{cases} (X \times Y / E)_x = (X \times Y)_x / E_x = Y / E_x \in \mathfrak{R} \\ (X \times Y / E)^y = (X \times Y)^y / E^y = Y / E^y \in \mathfrak{J} \end{cases}$$

$$X \times Y / E \in \mathcal{C}$$

Donc $\mathcal{C}$ est une σ-algèbre de parties de $X \times Y$ contenant Ω.

Par suite $\mathfrak{J} \otimes \mathfrak{R} = \sigma - A(\Omega)$ est inclus dans $\mathcal{C}$.

b) Soit $f : X \times Y \longrightarrow Z \left(= \overline{\mathbb{R}} \text{ ou } C\right)$ $\mathfrak{J} \otimes \mathfrak{R}$ -mesurable.

$$\forall (x,y) \in X \times Y \ \forall C \in B(Z) \ \ f_x^{-1}(C) = \left[f^{-1}(C)\right]_x \in \mathbb{B} \quad \text{et} \quad (f^y)^{-1}(C) = \left[f^{-1}(C)\right]^y \in A$$

$\forall (x,y) \in X \times Y$, f_x est $\mathbb{B}$- mesurable et f^y est A-mesurable

III.1.10. <u>**Proposition :**</u> Supposons que μ et v sont finies sur $(X, \mathfrak{J})$ et $(Y, \mathfrak{R})$ respectivement. Pour tout élément E de $\mathfrak{J} \otimes \mathfrak{R}$

i)

$$\begin{array}{ll} X & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto v(E_x) \end{array}, \text{ est } \mathfrak{J}\text{-mesurable}$$

ii)

$$\begin{array}{lll} Y & \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ y & \longmapsto \mu\left(E^{y}\right) \end{array} \text{, est } \mathfrak{R}\text{-mesurable}$$

III.1.11. <u>Proposition</u> : Supposons que μ et v sont σ-finies sur $(X, \mathfrak{J})$ et $(Y, \mathfrak{R})$ respectivement.

Pour tout élément E de $\mathfrak{J} \otimes \mathfrak{R}$

i)

$$\begin{array}{l} X \longmapsto \overline{\mathbb{R}}_{+} \\ x \longmapsto v\left(E_{x}\right), \text{ est } \mathfrak{J}\text{-mesurable} \end{array}$$

ii)

$$\begin{array}{l} Y \longmapsto \overline{\mathbb{R}}_{+} \\ X \longmapsto \mu\left(E^{y}\right), \text{ est } \mathfrak{R}\text{-mesurable} \end{array}$$

iii) $\int\limits_{X} v\left(E_{x}\right) d\mu(x) = \mu \times v(E) = \int\limits_{X} \mu\left(E^{y}\right) dv(y)$.

III.1.12. <u>Proposition</u> : (Théorème de Tonelli)

Supposons que μ et v sont σ-finies sur $(X, \mathfrak{J})$ et $(Y, \mathfrak{R})$ respectivement, si $f : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{+}$ est $\mathfrak{J} \otimes \mathfrak{R}$-mesurable alors :

i)

$$\begin{array}{ll} X & \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{+} \\ x & \longrightarrow \int_{Y} f(x, y)\, d\nu(y) \end{array} \text{, est } \mathfrak{J}\text{-mesurable}$$

ii)

$$\begin{array}{ll} Y & \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{+} \\ y & \longmapsto \int\limits_{X} f(x, y)\, d\mu(x) \end{array} \text{, est } \mathfrak{R}\text{-mesurable}$$

iii) $\int\limits_{X}\left[\int\limits_{Y} f(x, y)\, dv(y)\right] d\mu(x) = \int\limits_{X \times Y} f(x, y)\, d\mu \times v(x, y) = \int\limits_{Y}\left[\int\limits_{X} f(x, y)\, d\mu(x)\right] dv(y)$.

III.2. <u>ESPACES</u> L^{P}

$\mathfrak{J}$ est une σ-algèbre de parties de X, μ est une mesure positive sur $(X, \mathfrak{J})$

$$p' = \begin{cases} +\infty \text{ si } p = 1 \\ \frac{p}{p-1} \text{ si } 1 < p < +\infty \\ 1 \text{ si } p = +\infty \end{cases} \qquad \forall\, p \in [1, +\infty]$$

III.2.1. <u>ESPACES</u> $\mathbf{L}^{P}(X, \mathfrak{J}, \mu)$

III.2.1.1 **Rappels :** Soient un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$

a) f est dite convexe sur I si $\forall\, x, y \in I \;\; \forall \alpha \in [0,1]$

$f\ \left[(1-\alpha)\, x + \alpha y\right] \leq (1-\alpha)\, f\,(x) + \alpha f\,(y)$.

b) Supposons que I est ouvert. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) f convexe sur I

ii) $\forall\, c \in I \quad \exists\, m \in \mathbb{R} : \quad \forall\, x \in I \;\; f\ \ (x) \geq f\ \ (c) + m\,(x-c)$

c) Supposons que I est ouvert et f deux fois dérivable sur I. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

i) f convexe sur I

ii) $\forall\, x \in I \;\; f''\,(x) \geq 0$

III.2.1.2. **Lemme :** $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall \alpha \in \;\;]0,1[\,,$

$$x^{1-\alpha} y^{\alpha} \leq (1-\alpha)\, x + \alpha y$$

Preuve

Considérons :
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f\,(x) = -\log x \end{aligned}$$

Alors : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^* \;\; f\ \ (x) = -\dfrac{1}{x}$ et $f'\,(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$

Donc f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ et par suite

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}_+^* \; \forall\, \alpha \in\,]0,1[\; -\log\left[(1-\alpha)\, x + \alpha y\right] &\leq -\,(1-\alpha) \log x - \alpha \log y \\ \Rightarrow \qquad (1-\alpha) \log x + \alpha \log y &\leq \log\left[(1-\alpha)\, x + \alpha y\right] \\ \Rightarrow \qquad \log\left[x^{1-\alpha} y^{\alpha}\right] &\leq \log\left[(1-\alpha)\, x + \alpha y\right] \\ \Rightarrow \qquad x^{1-\alpha} y^{\alpha} &\leq (1-\alpha)\, x + \alpha y \end{aligned}$$

III.2.1.3. **Notation :** Soit p un élément de $\mathbb{R}_+^*$

a) $\forall\, f \in \mathcal{L}_0\,(X, \mathfrak{J}, \mu) \;\; \|f\|_p = \left[\int |f|^p \, d\mu\right]^{1/p}$

b) $\mathcal{L}^p\,(X, \mathfrak{J}, \mu) = \left\{ f \in \mathcal{L}_0\,(X, \mathfrak{J}, \mu) : \|f\|_p < +\infty \right\}$

III.2.1.4. **Remarques :** Soit p un élément de $\mathbb{R}_+^*$

a) $\forall\, f, g \in \mathcal{L}_0\,(X, \mathfrak{J}, \mu)$

$$f \in \mathcal{L}^p\,(X, \mathfrak{J}, \mu) \Longleftrightarrow 0 \leq \|f\|_p < +\infty$$

$$\|f\|_p = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \;\; \mu - p.p.$$

$f \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{J}, \mu)$ et $g = f\ \mu - p.p \Longrightarrow g \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{J}, \mu)$ et $\|g\|_p = \|f\|_p$

b) $\forall\ (\lambda, f) \in \mathbb{C} \times \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{J}, \mu),\ \lambda f \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{J}, \mu)$ et .
$\|\lambda \cdot f\|_p = |\lambda|\, \|f\|_p$

III.2.1.5. **Proposition :** Supposons que μ est $\sigma-$finie et $1 \leq p \leq +\infty$. Si :

- $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ est $\mathfrak{J}$-mesurable
- fg est $\mu-$intégrable pour tout élément f de

$\mathcal{S} = \{\varphi : X \to \mathbb{C} : \varphi\ \ \mathfrak{J}-\text{étagée et } \mu \text{ intégrable}\}$

- $M(g) = \sup\{\int fgd\mu :\ f \in \mathcal{S},\ \|f\|_p = 1\}$

Alors g appartient à $\mathcal{L}^{p'}(X, \mathfrak{J}, \mu)$ et $\|g\|_{p'} = M(g)$.

Preuve
Si $\|g\|_{p'} = 0$ alors $g = 0$ et la proposition est évidente.
Supposons donc que $\|g\|_{p'} \neq 0$

1) 1$^{\text{er}}$ cas : Supposons que $1 < p < +\infty$

Considérons une suite croissante $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathfrak{J}$ telle que :
$X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \mu(X_n) < +\infty$
Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications $\mathfrak{J}$ - étagées de X dans $\mathbb{C}$, convergeant simplement vers g et telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |\ \varphi_n\ |\leq|\ \varphi_{n+1}\ |\leq|\ g\ |$
Posons $\forall n \in \mathbb{N},\ g_n = \varphi_n \chi_{X_n}$
Alors :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ g_n \in \mathcal{S} \text{ et } \ |\ g_n\ |\leq|\ g\ | \\ \\ (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } g \text{ simplement} \end{cases}$$

Posons $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n = (\|g_n\|_{p'})^{1-p'}\ |\ g_n\ |^{p'-1}\ \overline{sgn(g)}$ où $\forall z \in \mathbb{C}$,
$sgn(z) = e^{iArg(z)}$
Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n\|_p = 1$ et $\int\ |\ f_n g_n\ |\ d\mu = \|g_n\|_{p'}$

D'après le lemme de Fatou, nous avons :

$$\begin{aligned} \|g\|_{p'} &\leq \lim_{n\to+\infty} \inf \|g_n\|_{p'} = \lim_{n\to+\infty} \inf \int \mid f_n g_n \mid d\mu \\ &= \lim_{n\to+\infty} \inf \int f_n g_n d\mu \leq M(g) < +\infty \end{aligned}$$

Donc g appartient à $\mathcal{L}^{p'}(X,\mathfrak{J},\mu)$.

2) 2$^{\text{ème}}$ cas : Supposons que $p = 1$, c'est-à-dire que $p' = +\infty$

a) Considérons un nombre réel $\varepsilon > 0$ et

$$A_\varepsilon = \{x \in X : \mid g(x) \mid \geq M(g) + \varepsilon\}$$

Supposons que $\mu(\ A_\varepsilon) > 0$
Alors, puisque μ est $\sigma-$ finie, il existe un élément B de $\mathfrak{J}$ tel que :

$$B \subset A_\varepsilon \text{ et } 0 < \mu(B) < +\infty$$

Posons $f = \mu(B)^{-1} sgn(g)\chi_B$
Alors :

$$\begin{cases} f \in \mathfrak{J} \text{ et } \|f\| = 1 \\ \int fgd\mu = \int \mu(B)^{-1} \mid g \mid \chi_B d\mu \geq M(g) + \varepsilon \end{cases}$$

Cela contredit l'hypothèse, donc $\mu(\ A_\varepsilon) = 0$ et par suite
$\|g\|_{+\infty} \leq M(g) < +\infty$. Donc g appartient à $\mathcal{L}^{+\infty}(X,\mathfrak{J},\mu)$.

b) D'après l'inégalité de Hölder, nous avons

$$\forall f \in \mathcal{S} \text{ avec } \|f\|_p = 1, \mid \int fgd\mu \mid \leq \|f\|_p \|g\|_{p'} = \|g\|_{p'}$$

Donc $M(g) \leq \|g\|_{p'}$
Par conséquent $\|g\|_{p'} = M(g)$.

III.2.1.6. Proposition : Supposons que $1 < p < +\infty$. Si f appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}(\mathbb{R}^d), m^d)$ et $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}(\mathbb{R}^d), m^d)$ alors:

i) pour m^d-presque tout élément x de $\mathbb{R}^d$,

$$h_x : \begin{array}{c} \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}} \text{ ou } \mathbb{C} \\ y \mapsto f(x-y)g(y) \end{array} \text{ est } m^d\text{−mesurable.}$$

ii) $x \mapsto f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dm^d(y)$ est un élément de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}(\mathbb{R}^d), m^d)$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

Preuve

III.2.2 MODES DE CONVERGENCE

$f,\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des applications $\mathcal{A}$-mesurables de X dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$.

III.2.2.1. Définition : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f en mesure si :

$$\forall\, r \in \mathbb{R}_+^*,\ \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\{x \in X \diagup |f_n(x) - f(x)| \geq r\}\right) = 0$$

III.2.2.2. Définition : Supposons que $1 \leq p \leq +\infty$. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A},\ \mu) \quad \text{si} \quad \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

III.2.2.3. Proposition : Supposons que $1 \leq p \leq +\infty$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f en mesure.

Preuve

Supposons un élément r de $\mathbb{R}_+^*$ et posons $E_n = \{x \in X \diagup |f_n(x) - f(x)| \geq r\}$

1$^{\text{er}}$ Cas : $1 \leq p < +\infty$.

Nous avons : $\begin{cases} \mu(En) \leq \left(\dfrac{1}{r}\|f_n - f\|_p\right)^p & \text{(d'après } \mathbf{IV.1.10}) \\ \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_p = 0 \end{cases}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu(E_n) = 0$

2$^{\text{ème}}$ Cas : $p = +\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{+\infty} &= 0 \Longrightarrow \left[\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_0,\ \|f_n - f\|_{+\infty} < r\right] \\ &\Rightarrow \left[\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_0 \quad \mu(E_n) = 0\right] \\ &\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n) = 0 \end{aligned}$$

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f en mesure.

III.2.2.4. **Proposition :** Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f en mesure, alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f μ-presque partout.

III.2.2.5. **Proposition** : Supposons que μ est finie et que les applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f sont à valeurs finies μ-presque partout. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f $\mu-$presque partout alors :

a) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f en mesure

b) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f presque uniformément, c'est-à-dire que :

$$\forall \delta \in \mathbb{N}^*,\ \exists\ N_\delta \in \mathcal{A} : \begin{cases} \mu(N_\delta) \leq \delta \\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } f \text{ uniformément sur } X\diagup N_\delta \end{cases}$$

(Théorème d'Egorov)

Preuve :
Supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f $\mu-$presque partout.
Posons : $F = \{x \in X : f(x) \text{ fini}, \forall x \in \mathbb{N},\ f_n(x) \text{ fini}, \lim f_n(x) = f(x)\}$ et $N = X\diagup F$.
Alors : $N \in \mathcal{A}$ et $\mu(N) = 0$.

a) Considérons deux nombres réels $r > 0$ et $\varepsilon > 0$
Posons $\forall m \in \mathbb{N},\ F_m^r = \{x \in F : \forall n \geq m,\ \mid f_n(x) - f(x) \mid < r\}$.
Alors :

$$\begin{cases} \mu(X\diagup F_1^r\ ) \leq \mu(X) < +\infty \\ (X\diagup F_m^r\ )_{m\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante et } \underset{m\in\mathbb{N}}{\cap}\ (X\diagup F_m^r\ )\ = X\ \diagup\ \underset{m\in\mathbb{N}}{\cup}\ F_m^r\ \ = X\diagup\ F \end{cases}$$

Donc $\lim \mu(X\diagup F_m^r) = \mu(X\diagup\ F) = \mu(N) = 0$.
Par conséquent : $\exists m_\varepsilon \in \mathbb{N} : \mu(X\diagup\ F_{m_\varepsilon}^r) < \varepsilon$.
Or $\forall n \geq m_\varepsilon$, $\{x \in X :\mid f_n(x) - f(x) \mid < r\} \subset X\diagup\ F_{m_\varepsilon}^r$
Donc : $\forall n \geq m_\varepsilon$, $\mu(\{x \in X :\mid f_n(x) - f(x) \mid < r\}) < \varepsilon$
Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu(\{x \in X :\mid f_n(x) - f(x) \mid < r\}) = 0$. Ainsi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f en mesure.

b) Considérons un nombre réel $\delta > 0$

Posons : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $N_\delta^k = X \diagup F_{m_\varepsilon}^r$ avec $r = \frac{1}{k}$ et $\varepsilon = \frac{\delta}{2^k}$.

Alors :

$$\begin{cases} \mu(N_\delta^k) < \frac{\delta}{2^k} \\ \forall n \geq m_{\frac{\delta}{2^k}}, \quad \forall x \in N_\delta^k, \quad | f_n(x) - f(x) | < \frac{1}{k} \end{cases}$$

Posons $N_\delta = \underset{k \in \mathbb{N}^*}{\cup} N_\delta^k$

Alors : $N_\delta \in \mathcal{A}$ et $\mu(N_\delta) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mu(N_\delta^k) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{\delta}{2^k} = \delta$

En plus nous avons :

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geq m_{\frac{\delta}{2^k}}$,

$$\sup_{x \in X \diagup N_\delta} | f_n(x) - f(x) | \leq \sup_{x \in X \diagup N_\delta^k} | f_n(x) - f(x) | \leq \frac{1}{k}$$

c'est-à-dire que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur $X \diagup N_\delta$.

III.2.2.5. Remarques : Dans la proposition précédente, la finitude de μ est essentielle. Par exemple, supposons que :

$$\begin{cases} (X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{R}), m^1) \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ f_n = \chi_{[n, \ n+1[} \\ f = 0 \end{cases}$$

i) $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$

Ainsi $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f simplement et par suite m^1- presque partout.

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $m^1(\{x \in \mathbb{R} :| f_n(x) - f(x) | \geq 1\}) = m^1([n, \ n+1[) = 1$

Ainsi $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers f en mesure m^1.

iii) Considérons un élément N de $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ tel que $m^1(N) < 1$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in (\mathbb{R} \diagup N) \cap [n, \ n+1[$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in (\mathbb{R} \diagup N)$ avec $| f_n(x) - f(x) | = 1$.

Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers f uniformément sur $\mathbb{R} \diagup N$.

Par suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers f $\quad m^1-$uniformément.

III.2.2.6. Définition Supposons que $1 \leq p < +\infty$. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f faiblement dans $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A},\ \mu)$ si :

$$\forall g \in \mathcal{L}^{p'}(X, \mathcal{A},\ \mu), \quad \lim_{n\to+\infty} \int f_n g d\mu = \int f g d\mu$$

III.2.2.7. Proposition : Supposons que $1 \leq p < +\infty$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A},\ \mu)$ alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f faiblement dans $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A},\ \mu)$.

<u>Preuve</u> :

$\forall g \in \mathcal{L}^{p'}(X, \mathcal{A},\ \mu)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mid \int f_n g d\mu - \int f g d\mu \mid \leq \int \mid f_n - f \mid\mid g \mid d\mu \leq \|f_n - f\|_p \|g\|_{p'}$

Donc $\lim \|f_n - f\|_p = 0 \Rightarrow \forall g \in \mathcal{L}^{p'}(X, \mathcal{A},\ \mu)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int f_n g d\mu = \int f g d\mu$. (C.Q.F.D.)

Le tableau suivant résume les résultats de ce paragraphe, en matière de convergence.

$$\begin{tikzcd}
\text{Convergence } \mu - p.p \arrow[rr, dashed, shift right] & & \text{converge } \mu - p.u \arrow[ll, shift right] \\
\text{convergence en mesure } \mu \arrow[u, dotted] & \text{convergence dans } \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A},\ \mu) \arrow[l] \arrow[r] & \text{convergence faible dans } \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A},\ \mu)
\end{tikzcd}$$

$\rightarrow$ implique

..... $\rightarrow$ implique pour une sous-suite

$- - - - - \rightarrow$ implique si est μ finie